

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

25. Band, Heft 5

30. Dezember 1941

S. 193—240

Philosophie. Logik.

● Hardy, G. H.: *A mathematician's apology*. Cambridge: Univ. press 1940. VII, 94 pag. 3/6.

● Dugas, R.: *Essai sur l'incompréhension mathématique*. Avec une préface de G. Bouligand. Paris: Libr. Vuibert 1940. IV, 131 pag. ffrs 28.50.

Die Schrift umreißt in einzelnen Studien den Beitrag der französischen Mathematiker zu den philosophischen Grundlagenörterungen der Mathematik. Von der problemgeschichtlichen Methode wird dabei ausgiebig Gebrauch gemacht. Die Schrift zerfällt in zwei Teile, von denen der erste die philosophische Grundlagenproblematik für die reine Mathematik, der zweite für die Anwendungen hauptsächlich in der Mechanik behandelt. — Im ersten Teil werden insbesondere die Schwierigkeiten, wie sie durch die verschiedenen axiomatischen Ansätze bedingt sind, wie sie sich durch die Sprache ergeben und wie sie insbesondere mit dem menschlichen Verstande (Erkenntnistheorie) zusammenhängen, erörtert. Ihm sind drei Noten angefügt, von denen die erste die Schwierigkeiten, wie sie mit dem Begriff des Unendlichen zusammenhängen und insbesondere durch die Mengenlehre in die Mathematik hineingekommen sind, behandelt. Damit in unmittelbarem Zusammenhang steht das Problem der Stetigkeit, von dem in der zweiten Note gehandelt wird. Gerade hierbei wird auf die problemgeschichtliche Entwicklung besonders Bedacht genommen. Die dritte Note endlich weist die Verständnisschwierigkeiten an einigen elementaren praktischen Beispielen auf. Einige wichtige Folgerungen scheinen uns dabei gerade heute besonders beachtenswert zu sein. Wir geben sie im Wortlaut wieder: „Il est donc naturel que l'axiomatique mathématique nous oblige à des sérieux efforts: il ne s'agit pas d'une architecture parfaite dont nous devions seulement admirer l'ordonnance. Il s'agit, je le répète, d'une matière vivante et . . . contingente. S'il nous faut parfois chasser l'expérience pour entrer dans le jeu symbolique des mathématiciens, il nous faut aussi savoir au besoin la rappeler à nous, au moins sous une certaine forme, pour saisir la portée de leur axiomes et le sens intuitif qu'ils y ont laissé. C'est entre ces deux écueils que nous devons naviguer . . .“ Der Ref. tritt im wesentlichen auch für diese Einsichten in seinem „Hauptproblem der Mathematik“ (Berlin 1941) ein. — Der zweite Teil dehnt die Problematik auf die Anwendungen aus. „Les difficultés des axiomes de la mécanique offrent l'occasion de montrer comment l'intension de la métaphysique a été, dans ce domaine, la source de bien des malentendus.“ Eine Note, die den allgemeinen Erörterungen angefügt ist, beschäftigt sich mit den denkerischen Grundlagen der Quantentheorie. Ein Anhang sammelt einige berühmte Irrtümer und ordnet ihr Erkennen in die ganze Fragestellung der Schrift ein. *Steck (München).*

Moisil, Gr. C.: *Recherches sur la théorie des chaînes*. Ann. Sci. Univ. Jassy, I: Math. 27, 181—240 (1941).

Der in der Mathematik vielfach direkt oder indirekt auftretende Begriff der Kette oder der Verkettung wird hier zum Gegenstand einer eigenen Untersuchung gemacht. Unter einer Kette wird eine Gesamtheit von geordneten Elementenpaaren x/y verstanden, wobei die Zugehörigkeit von x/y und y/z zur Kette die von x/z jedesmal nach sich zieht. Jeder Kette entspricht offenbar ein zweistelliges transitives Prädikat. Entsprechend den logischen Verknüpfungen zwischen Prädikaten lassen sich dann Grundbegriffe wie Durchschnitt zweier Ketten, Vereinigungskette, Unterkette einer Kette u. a. leicht einführen. Im ersten Teile der Arbeit wird hauptsächlich Wert auf die lineare Repräsentation der Ketten gelegt, die Beziehungen zur Theorie der Graphen ergibt. Die Untersuchungen über abstrakte Ketten lassen sich dadurch in ein algebraisches Gewand kleiden, daß sie in Verbindung mit gewissen Matrizen gebracht werden. Schon E. Schröder hatte ja gezeigt, daß die Relationen im allgemeinen, also auch die transitiven Relationen, als Matrizen in einer Booleschen zweiwertigen Algebra aufgefaßt werden können. Es wird weiter der Zusammenhang hergestellt mit Untersuchungen von P. Hertz [Math. Ann. 87, 246—269 (1922); 89, 76—102 (1923); 101, 457—514 (1929)], bei denen ja ebenfalls die Verkettung die Hauptrolle spielt. Im zweiten Teile der Arbeit wird auf die Bedeutung der Verkettung in der Logistik hingewiesen, wie

sie namentlich bei den verschiedenen Implikationsbeziehungen (in der gewöhnlichen, der mehrwertigen und der intuitionistischen Logik) und der Äquivalenzbeziehung auftritt.

Ackermann (Burgsteinfurt).

Müller, Hans Robert: Algebraischer Aussagenkalkül. S.-B. Akad. Wiss. Wien IIa 149, 77—115 (1940).

Eine n -wertige und k -stellige ($n \geq 2, k \geq 0$) Wahrheitsfunktion (WF) $\varphi(X_1, \dots, X_n)$ ist eine Abbildung der Menge der geordneten k -tupel von Wahrheitswerten (WWen) in die Menge der vorgegebenen n WWe. Unter der n -wertigen Logik L_n versteht Verf. die Menge der zugehörigen WFn (während oft nur echte Teilmengen in Betracht gezogen werden). Verf. stellt jedem $\varphi(X_i)$ der L_n umkehrbar eindeutig ein Polynom $\varphi(x_i)$ in folgender Weise an die Seite: Den WVen werden willkürlich die Zahl 0 und die $(n-1)$ -ten Einheitswurzeln zugeordnet (1 dem wahren, und 0 dem falschen WW, falls diese Werte ausgezeichnet sind). Dann gibt es genau ein Polynom $\varphi(x_i)$ höchstens $k \cdot (n-1)$ -ten Grades, welches die zur Abbildung $\varphi(X_i)$ isomorphe Abbildung der Zahlen $0, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{n-1}$ liefert (Interpolationsaufgabe). — Viele Fragen der L_n lassen sich so leicht rein algebraisch behandeln, z. B. die Frage, ob eine vorgegebene Kombination von WFn immer den WW wahr liefert (Tautologie). Verf. diskutiert so WFn, Axiomensysteme, Isomorphismen in der Menge der zweistelligen WFn, insbesondere für $n=2$ [hier wählt man die Polynmkoeffizienten zweckmäßig mod 2, vgl. auch J. J. Gégalkine, Rec. math. Moscou 35, 311—377 (1928)] und $n=3$ [vgl. auch Lukasiewicz-Tarski, C. R. Soc. Sci. Varsovie 23, 30—50 (1930)]. Wichtige Beziehungen zwischen verschiedenwertigen Logiken lassen sich leicht formulieren mittels des Begriffs der Erweiterung von WFn. Bei festliegenden Abbildungen der WWe der L_m und L_n (vgl. oben!) heißt die k -stellige WF $\varphi^*(X_i)$ der L_n eine Erweiterung der k -stelligen WF $\varphi(X_i)$ der L_m , wenn $(m-1)$ ein echter Teiler von $(n-1)$ ist und das Polynom $\varphi^*(x_i)$ für die den WVen der L_m zugeordneten Zahlen mit $\varphi(x_i)$ übereinstimmt. Die hierdurch erzeugte Abbildung eines echten Teilbereiches der Menge der k -stelligen WFn von L_n auf die $m^{(m^k)}$ k -stelligen WFn von L_m (die Umkehrung ist $n^{(n^k - m^k)}$ -deutig) ist homomorph bezüglich der Einsetzung. Die Tautologien sind die Bilder der sog. „Erweiterungen der Tautologien“. — Verf. erwähnt die durch seine Interpretation der WWe nahegelegte Deutung der WWe als gleichberechtigte Wahrheitsarten, denen eine Falschheit gegenübersteht.

Hermes (Bonn).

Stumpf, Felix: Außenwelt und Wahrscheinlichkeit. Naturwiss. 29, 218—220 (1941).

Hinweis auf die Ansicht von C. Stumpf, nach der das Dasein einer Außenwelt und die Gültigkeit des Kausalsatzes Hypothesen sind, denen durch indirekten Schluß aus den Erfahrungstatsachen eine Wahrscheinlichkeit gegeben wird, welche praktisch gleich Eins ist. Die Begründung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf „Nichtwissen“ von C. Stumpf wird kurz erläutert.

C. F. v. Weizsäcker (Berlin-Dahlem).

Riabouchinsky, Dimitri: Les diviseurs de zéro et le concept de l'origine d'un nombre. C. R. Acad. Sci., Paris 212, 677—680 (1941).

Zu der Operation $y = |x|$, dem Übergang zum Absolutwert, wird eine inverse Operation $x = \pm |y|$, die „Rückkehr zum Relativwert“, eingeführt; ebenso zum „Grenzübergang“ $L(a) = 0$ eine inverse Operation, die „Rückkehr von der Grenze“ $L^{-1}(0) = a$. Diese Operationen sollen zu einer neuen Erweiterung des Zahlbegriffs und des Wirkungsbereiches der Algebra führen, ferner zu einer Theorie der Funktionen von hyperkomplexen Größen $x + jy$ und $x + ky$ mit $j^2 = 1$ bzw. $k^2 = 0$, zur Überwindung der Zenonischen Dialektik und zu einer „analytischen Geometrie der polygonalen, unstetigen und unbestimmten Formen“.

van der Waerden (Leipzig).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Reichenbach, Hans: Note on probability implication. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 265—267 (1941).

Verf. gibt einige Verbesserungen des von ihm an früherer Stelle (Wahrscheinlich-

keitslehre. Leiden 1935; dies. Zbl. **10**, 364) aufgestellten Axiomensystems für die Wahrscheinlichkeitslehre, da das bisherige System nach J. C. C. McKinsey [Bull. Amer. Math. Soc. **45**, 799—800 (1939); dies. Zbl. **22**, 243] zu Paradoxien Anlaß gab.

Ackermann (Burgsteinfurt).

Greville, T. N. E.: Invariance of the admissibility of numbers under certain general types of transformations. Trans. Amer. Math. Soc. **46**, 410—425 (1939).

Verf. betrachtet Ereignisse, die aus aufeinanderfolgenden Folgen einer Reihe von Grundereignissen so entstehen, daß bestimmte Permutationen (nicht notwendig von derselben Elementenanzahl) von günstigen und ungünstigen Resultaten der Grundereignisse als günstige bzw. ungünstige Resultate der abgeleiteten Ereignisse festgestellt werden (z. B. wie die „sets“ im Tennisspiel in Beziehung zu den „games“). — Es werden eigentliche wahrscheinlichkeitstheoretische Probleme behandelt, sowie kritische Fragen in Zusammenhang mit dem Copelandschen Begriff der „admissible numbers“ (gleichbedeutend mit „nachwirkungsfreie Folgen“, „suites indifférentes“ usw. bei anderen Autoren).

Bruno de Finetti (Trieste).

Mosteller, Frederick: Note on an application of runs to quality control charts. Ann. math. Statist. **12**, 228—232 (1941).

Es werden $2n$ Beobachtungen einer stetigen Größe x in ihrer natürlichen Reihenfolge betrachtet. Für jede Beobachtung x_i wird nun a bzw. b geschrieben, je nachdem ob x_i kleiner oder größer als der Median ist. Verf. sucht die Wahrscheinlichkeit dafür, daß mindestens eine Sequenz von s oder mehreren a - bzw. b -Größen auftritt. Er braucht dazu nur eine von A. M. Mood [Ann. math. Statist. **11**, 367—392 (1940); dies. Zbl. **24**, 53] angegebene Verteilung zu summieren. Die Formel wird zwar sehr umständlich, jedoch hat Verf. eine Tabelle berechnet, die eine unmittelbare Anwendung gestattet.

v. Schelling (Berlin-Charlottenburg).

Schulz, Günther: Über eine für die Statistik wichtige Verallgemeinerung des Rencontrespiels. S.-B. Berlin. math. Ges. **38/39**, 73—83 (1940).

Ce mémoire généralise le problème des „rencontres“ de la façon suivante: Un tirage de n boules numérotées $1, 2, \dots, n$ dans l'ordre m_1, \dots, m_n fournira une „rencontre au sens large“ au $p^{\text{ième}}$ tirage si m_p appartient à un ensemble de nombres \mathcal{M}_p fixé d'avance (certains \mathcal{M}_p peuvent être vides et ils ne sont pas obligatoirement tous disjoints). Dans le problème classique on a $\mathcal{M}_p = \{p\}$. L'auteur au moyen de calculs de combinaisons arrive à écrire les équations récurrentes fournissant les probabilités des diverses éventualités. Ses résultats sont comme dans le problème classique que la loi de probabilité pour qu'il y ait au moins x rencontres au sens large tend vers une loi de Poisson si n augmente indéfiniment.

Daniel Dugué (Paris).

Cramér, Harald: Deux conférences sur la théorie des probabilités. Skand. Aktuarie Tidskr. **24**, 34—69 (1941).

Ces deux conférences faites par l'auteur à l'Institut Henri Poincaré à Paris contiennent les résultats récents et la bibliographie des deux questions suivantes: 1°) Développements en série qui se rattachent à la loi des grands nombres. Cette question a été traitée plus complètement par l'auteur dans son ouvrage: Random variables and probability distributions (Cambridge Tracts 1937; ce Zbl. **16**, 363). — Tout un paragraphe est consacré à l'étude du développement asymptotique de $F_n(x)$, loi de probabilité totale de la moyenne de n variables aléatoires suivant la même loi. En particulier l'auteur donne une forme de développement convergent et valide si les variables contiennent une composante absolument continue. — 2°) Le problème de la ruine d'un joueur dans le cas d'un processus stochastique homogène. — Cette question est traitée d'une façon qui l'apparente aux travaux de Kolmogoroff sur les probabilités d'intersection de deux courbes continues. — L'auteur se réfère aux travaux de Doob sur la difficulté de définir d'une manière rigoureuse les probabilités dans un tel domaine.

Daniel Dugué (Paris).

Orts, J. M.: Die Beständigkeit des normalen, von zwei Zufallsveränderlichen abhängigen Wahrscheinlichkeitsgesetzes. *Rev. mat. hisp.-amer.*, IV. s. 1, 34—36 (1941) [Spanisch].

Im Anschluß an eine Untersuchung von Pólya [*Math. Z.* 18, 96—108 (1923)] wird die Laplacesche Transformierte der zweidimensionalen Verteilungsfunktion $f(x, y)$ mit $\Phi(u, v)$ bezeichnet und $\psi(u, v) = \ln \Phi$ gesetzt; die Lösung der Funktionalgleichung

$$\psi(au, bv) + \psi(a_1u, b_1v) = \psi(a_2u, b_2v)$$

mit den zusätzlichen Bedingungen $a^2 + a_1^2 = a_2^2$, $b^2 + b_1^2 = b_2^2$ führt dann für die Verteilungsfunktion zu dem Ergebnis

$$f(x, y) = k \exp[-(Ax^2 + Bxy + Cy^2)]. \quad F. Knoll.$$

Kolmogoroff, A. N.: Über das logarithmisch normale Verteilungsgesetz der Dimensionen der Teilchen bei Zerstückelung. *C. R. Acad. Sci. URSS*, N. s. 31, 99—101 (1941).

Beobachtungen von N. Rasumovski gemäß zeigen die Logarithmen geeigneter Abmessungen r von Goldkörnern im Goldsand, Erzklumpen bei ihrer Zerstückelung, eine Gaußsche Verteilung. Um dieser Tatsache mathematisch gerecht zu werden, wird vorausgesetzt: Es seien 1. einerseits die Wahrscheinlichkeiten dafür, daß bei der Zerstückelung eines Teilchens während der Zeit $(t, t+1)$ genau n Teile erhalten werden, andererseits die Verteilungsgesetze $F_n(a_1, \dots, a_n)$ der Abmessungsverhältnisse $\frac{r_i}{r} \leq a_i$ der n Teile sowohl von r , als auch von der Vorgeschichte des zerstückelten Teilchens und dem Schicksal anderer Teilchen unabhängig; 2. falls $Q(k)$ den Mittelwert der Anzahl jener Teilchen mit den Abmessungen $\leq kr$ bezeichnet, die innerhalb $(t, t+1)$ aus einem Teilchen mit der Abmessung r zur Zeit t entstehen, so seien $Q(1)$ sowie $\int_0^1 |\log k|^3 dQ(k)$ endlich. Mit $\bar{N}(e^x, t)$ bzw. $\bar{N}(t)$ seien die Mittelwerte der Anzahl der Teilchen von den Abmessungen $\leq e^x$ bzw. der gesamten Teilchenanzahl zur Zeit t bezeichnet. Sodann beweist Verf., daß nach dem Satz von Liapounoff $\bar{N}(e^x, t)/\bar{N}(t)$ für große t in x gleichmäßig durch eine Gaußsche Verteilung mit dem Mittelwert $tA = t \int_0^1 \log k dQ(k)/Q(1)$ und dem Streuungsquadrat $t \int_0^1 (\log k - A)^2 dQ(k)/Q(1)$ asymptotisch dargestellt wird. v. Stachó (Budapest).

Hartman, Philip: Normal distributions and the law of the iterated logarithm. *Amer. J. Math.* 63, 584—588 (1941).

Soit $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), \dots$ une suite de fonctions statistiquement indépendantes, définies dans l'intervalle $0 \leq t \leq 1$, et telles que la mesure de l'ensemble des points t où $x_n(t) < x$ soit $(2\pi b_n)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^x \exp(-u^2/2b_n) du$. — L'auteur considère les sommes $s_n(t) = x_1(t) + x_2(t) + \dots + x_n(t)$ et $B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$. Il existe un nombre α tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(t)/(B_n \log \log B_n)^{\frac{1}{2}} = \alpha$ presque partout sur l'intervalle $0 \leq t \leq 1$, sous l'hypothèse que $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = \infty$. Sans autre hypothèse supplémentaire, l'auteur montre que α est la borne supérieure des nombres r jouissant de la propriété suivante: Il existe un nombre $c > 1$ et une suite d'indices $\{n_k\}$ tels que $B_{n_k} > c B_{n_k-1}$ et que la série $\sum |\log B_{n_k}|^{-r}$ soit divergente. Ville (Paris).

Schwartz, Laurent: Sur le module de la fonction caractéristique du calcul des probabilités. *C. R. Acad. Sci., Paris* 212, 418—421 (1941).

Es sei $F(x)$ die Verteilungsfunktion einer reellen Zufallsgröße, d.h. eine von $F(-\infty) = 0$ bis $F(+\infty) = 1$ monoton wachsende Funktion und $F = F_1 + F_2 + F_3$ ihre (durch die Wahl $F_i(-\infty) = 0$ eindeutig bestimmte) Lebesguesche Zerlegung in totalstetige Teil-, Unstetigkeits- und Singularitätsfunktion. Durch sorgfältige Untersuchung der entsprechenden charakteristischen Funktionen, d.h. Fourier-Stieltjes-Trans-

formierten, $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3$, wird gezeigt, daß $0 \leq \lim_{|t| \rightarrow \infty} |\varphi(t)| - F_2(+\infty) \leq F_3(+\infty)$, und daß somit die angegebene Differenz, bei Nichtbeachtung einer t -Menge mit der Grenzdichte Null, selbst gleich Null ist.

v. Stachó (Budapest).

Dugué, Daniel: Sur quelques exemples de factorisation de variables aléatoires. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 838—840 (1941).

Lehrreiche Beispiele über die Zerlegbarkeit von Wahrscheinlichkeitsverteilungen; u. a. wird bewiesen, daß in einem Produkt von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die keine Poissonsche W -Verteilung als Faktor enthalten, ein solcher Faktor entstehen kann.

Bruno de Finetti (Trieste).

Batiele, Edgar: Sur la composition des probabilités de densités constantes. C. R. Acad. Sci., Paris **211**, 420—422 (1940).

Étude de la loi de probabilité de la somme de n variables aléatoires ayant une densité de probabilité constante sur un segment fini de longueur variable, au moyen de remarques fondées sur le calcul des volumes dans un espace euclidien à n dimensions.

Daniel Dugué (Paris).

Bachelier, Louis: Probabilités des oscillations maxima. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 836—838 (1941).

L'auteur donne les lois de probabilités des plus grands écarts, de l'écart maximum et de l'oscillation maximum d'une variable aléatoire obéissant à une loi de Gauss d'écart quadratique moyen $\sqrt{\varphi(t)}$, $\varphi(t)$ étant croissant. Ces formules se rattachent à celles qu'il a publiées dans son ouvrage: Les nouvelles méthodes du calcul des probabilités (ce Zbl. **21**, 40).

Daniel Dugué (Paris).

Jongh, B. H. de: Allgemeiner Minimalsatz für Verteilungen. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. **44**, 738—743 u. dtsch. Zusammenfassung 743 (1941) [Holländisch].

Durch mechanische Deutung der Momente einer Verteilung glaubt Verf. zu beweisen, daß für jede Verteilung der stochastischen Veränderlichen x mit dem Erwartungswert $E(x)$ und der Streuung σ^2 sich mit der Wahrscheinlichkeit $w \geq 1 - \frac{1}{t^2}$ aussagen läßt, daß für beliebige positive n ein beobachteter x -Wert der Beziehung

$$-t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < x - E(x) < +t \sigma \sqrt{n}$$

gehört, die für $n = 1$ in die Ungleichung von Tschebyscheff übergeht. Diese Verallgemeinerung ist falsch. Setzt man nämlich $t = \sqrt{n}$ und läßt dann $n \rightarrow \infty$ gehen, so müßte mit $w \rightarrow 1$, also fast sicher, $-\sigma < x - E(x) < +\infty$ gelten, eine Beziehung, welche z. B. die normale Verteilung nicht erfüllt.

v. Schelling.

Fortet, Robert: Sur le calcul de certaines probabilités d'absorption. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 1118—1120 (1941).

Dans un travail antérieur (ce Zbl. **24**, 426) l'a. a étudié l'équation

$$(1) \quad L(u) = \frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

et en particulier les courbes aléatoires $X(t)$ où $F(t, x; \tau, \xi) = \text{Prob.} \{X(\tau) \leq \xi \text{ si } X(t) = x\}$ est solution de l'équation (1). — Il avait apporté les résultats suivants: si $a=1$, si b est bornée, si $\frac{\partial b}{\partial x}$ est bornée et satisfait à une condition de Lipschitz de la forme $\left| \Delta \frac{\partial b}{\partial x} \right| < A |\Delta x|^\Psi + B |\Delta t|^\Psi$ ($0 < \Psi \leq 1$), la courbe $X(t)$ est presque sûrement continue; quel que soit $c > 1$, il existe un nombre ε (aléatoire), tel que pour $|t'' - t'| < \varepsilon$ on ait:

$$|X(t'') - X(t')| \leq c \sqrt{-2|t'' - t'| \log |t'' - t'|}$$

$x = x(t)$ étant une fonction donnée à l'avance, le problème de l'absorption consiste dans l'étude de $\Phi(t, x; \tau) = \text{Prob.} \{X(\theta) - x(\theta) = 0 \text{ admet au moins une racine pour } t \leq \theta \leq \tau\}$. L'auteur a établi que Φ est solution de (1), et admet une dérivée φ par rapport à τ . Il donne la forme de l'équation intégrale à laquelle satisfait φ , en exprimant les termes de cette équation en fonction de la solution fondamentale de (1). — Reprenant maintenant le problème de l'absorption, l'auteur considère les probabilités $\bar{P}_c(t, x; \tau) = \text{Prob.} \{X(t) \leq x(t') \text{ dans } t \leq t' \leq \tau\}$,

$P_c(t, x; \tau) = \text{Prob.}\{X(t') < x(t'), \text{ dans } t < t' \leq \tau\}$, $\Phi_c(t, x; \tau) = \text{Prob.}\{X(t') = x(t') \text{ au moins une fois dans } t < t' \leq \tau\}$. — Ces probabilités sont prises dans l'hypothèse $X(t) = x$. C désigne la courbe $x = x(t)$. — L'auteur précise la définition de ces probabilités, et établit certaines relations entre elles. — Se plaçant dans le cas déjà étudié dans la précédente Note, il signale que $\bar{P}_c[t, x; \tau]$ est une fonction continue de τ , satisfaisant à $L(u) = 0$, que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{P}_c[t, x(t) - \varepsilon; \tau] = \bar{P}_c[t, x(t); \tau]$, $\lim_{\tau \rightarrow t} \bar{P}_c[t, x; \tau] = 0$ ou 1. — Dans l'espace E des courbes $x = x(\tau)$ où $x(t) = x$, la fonction de répartition $F(t, x; \tau, \xi)$ définit une mesure, que l'auteur appelle mesure- b pour rappeler qu'elle dépend de $b(t, x)$. — Si l'on considère la transformation fonctionnelle $y(\tau) = x(\tau) - \int_t^\tau b[t', x(t')] dt'$ elle associe à tout ensemble de mesure- b égal à m un ensemble de mesure = 0 égal à m et réciproquement. Ville (Paris).

Loève, Michel: Sur les systèmes d'événements; application à deux théorèmes classiques. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 261—263 (1941).

Dans la première partie l'auteur donne au moyen d'égalités symboliques des formules généralisant la loi de Poisson pour des couples d'événements dépendants. Dans la deuxième partie il calcule les probabilités de réalisation de suites d'événements indépendants ou non sous des conditions plus larges que celles de Borel et de Cantelli. Daniel Dugué (Paris).

Loève, Michel: La loi des grands nombres pour des variables aléatoires liées et des événements liés. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 840—843 (1941).

Conditions de convergence en probabilité, de stabilité au sens de Kolmogoroff et de limite supérieure en probabilité de variables aléatoires liées et de fréquence d'événements. Généralisation des inégalités de Bienaymé-Tchebychef sous des conditions de convergence des moments. Daniel Dugué (Paris).

Lévy, Paul: Intégrales stochastiques. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 1066—1068 (1941).

L'A. reprend et précise une idée qu'il a déjà indiquée dans une Note précédente [C. R. Acad. Sci., Paris **209**, 591—593 (1939); ce Zbl. **22**, 370]; $x = f(t)$ et $y = g(t)$ ($0 \leq t \leq T$) étant deux fonctions continues définissant paramétriquement une courbe plane Γ , et t_1, t_2, \dots, t_{n-1} ($n-1$) variables aléatoires indépendantes choisies entre 0 et T avec répartition uniforme de la probabilité, l'A. considère, en posant $t_0 = 0$, $t_n = T$, les variables aléatoires:

$$S_n = \frac{1}{2} \sum [g(t_{k-1}) + g(t_k)] [f(t_k) - f(t_{k-1})] \quad k = 1, 2, \dots, n$$

dont il désigne par μ_n les valeurs moyennes. Si lorsque n tend vers $+\infty$, S_n tend presque sûrement vers une limite non aléatoire S , S est dite intégrale stochastique, l'aire qu'elle représente est une aire stochastique. Appelant C_α la classe des fonctions $x = f(t)$ continues dans $(0, T)$ pour lesquelles existe un nombre fini K tel que, pour toute décomposition de $(0, T)$ en intervalles disjoints Δt , on ait: $\sum |\Delta x|^\alpha < K$, l'A. signale que, pour que:

$$(1) \quad \text{Prob}\left\{\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n - \mu_n) = 0\right\} = 1$$

il suffit que $f(t)$ et $g(t)$ appartiennent resp. à C_α et C_β avec $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} > \frac{1}{2}$ (il en résulte qu'il existe des courbes Γ pour lesquelles l'aire stochastique existe, alors que l'intégrale de Young n'existe pas); la propriété (1) est invariante pour les changements de paramètres $t = \varphi(t')$, du moins pour ceux satisfaisant à certaines conditions peu restrictives. L'A. indique d'autres critères pour (1), et étudie aussi le comportement des μ_n pour n tendant vers $+\infty$. R. Fortet (Paris).

Doob, J. L., and W. Ambrose: On two formulations of the theory of stochastic processes depending upon a continuous parameter. Ann. of Math., II. s. **41**, 737—745 (1940).

L'A. considère deux manières de définir un processus stochastique dépendant d'un paramètre, l'une due à J. L. Doob [Trans. Amer. Math. Soc. **42**, 107—140 (1937); ce Zbl. **17**, 27], l'autre à N. Wiener [Amer. J. Math. **60**, 897—936 (1938); ce Zbl. **19**, 354]; il établit quelques relations entre elles. B. Hostinsky (Brünn).

Agnew, R. P., and M. Kac: Translated functions and statistical independence. Bull. Amer. Math. Soc. 47, 148—154 (1941).

H. Steinhaus a proposé le problème suivant: trouver les fonctions $f(t)$ ($-\infty < t < +\infty$) telles que, pour une suite donnée $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ de nombres réels quelconques différents entre eux, les fonctions $f(t + \lambda_1), f(t + \lambda_2), \dots$ forment une suite de fonctions statistiquement indépendantes. Voir, pour les définitions, P. Hartman, E. R. von Kampen, A. Wintner [Amer. J. Math. 61, 477—486 (1939); ce Zbl. 21, 42]. — Les auteurs donnent quelques exemples concrets de fonctions $f(t)$ possédant la propriété énoncée plus haut.
B. Hostinský (Brünn).

Statistik:

- Simon, L. E.: An engineers' manual of statistical methods. New York: Wiley 1941.
- Treloar, Alan E.: Elements of statistical reasoning. New York: John Wiley & Sons a. London: Chapman & Hall, Ltd. 1939. XI, 261 pag. 19/6.
- Chambers, E. G.: Statistical calculation for beginners. Cambridge: Univ. press. 1940. VIII, 110 pag. 7/6.
- Kenney, John F.: Mathematics of statistics. Pt. 1/2. New York: John Wiley & Sons a. London: Chapman & Hall, Ltd. 1940. Pt 1: X, 248 pag. 12/6. Pt 2: IX, 202 pag. 11/-.
- Wolfle, D.: Factor analysis to 1940. (Psychometric monogr. Nr. 3.) New York: Univ. of Chicago Press 1940. VII, 69 pag. \$ 1.25.

● Darmon, G.: Les mathématiques de la psychologie. Mém. Sci. math. Fasc. 98, 51 pag. Paris (1941).

Kap. I enthält Sätze aus der Theorie der mehrfachen Korrelationen. Kap. II und III beschäftigen sich mit Schätzungen auf Grund von Stichproben, wobei in Kap. II angenommen wird, daß die beobachteten Merkmale fehlerfrei gemessen worden sind, während in Kap. III Beobachtungsfehler berücksichtigt werden. Kap. IV bringt Anweisungen zur Reduktion von Determinanten. Kap. V endlich gibt die Zwei-Faktor-Theorie von Spearman wieder. Die Darstellung ist im allgemeinen mehr berichtend als beweisend, doch wird die wichtige Formel von Spearman-Brown sehr einfach und überzeugend hergeleitet. Für eingehendere Unterrichtung ist ein kleines Literaturverzeichnis beigelegt, während numerische Anwendungen leider ganz fehlen.

v. Schelling (Berlin-Charlottenburg).

● Niklas, H., and M. Miller: Korrelationsrechnung und ihre Anwendung auf Statistik, Versuchswesen, Vererbungslehre, Wissenschaft und Technik. Leipzig: Lorentz 1940. 70 S. RM. 5.40.

● Greenwood jr., E. Russell: A detailed proof of the chi-square test of goodness to fit. Cambridge, Mass.: Harvard univ. press a. London: Oxford univ. press 1940. XIII, 61 pag. 8/-.

Baker, G. A.: Test of homogeneity for normal populations. Ann. math. Statist. 12, 233—236 (1941).

Einen Ansatz von J. Neyman [Skand. Aktuarie Tidskr. 20, 149—199 (1937); dies. Zbl. 18, 34] führt Verf. bis zur numerischen Anwendungsmöglichkeit durch und berichtet zum Vergleich über experimentell gewonnene Ergebnisse. Danach muß eine Stichprobe in der Regel aus mindestens 100 Elementen bestehen, wenn man einigermaßen sicher sein will, daß sie aus zwei oder mehreren normalen, durcheinander gemischten Kollektiven stammt. Die Prüfung ist willkürfrei, die starke Abhängigkeit der χ^2 -Probe von der Wahl der Klasseneinteilung kommt in Fortfall. Dafür ist die Rechnung verwickelt, und die logischen Grundlagen des Ansatzes von J. Neyman sind von F. N. David [Biometrika 31, 191—199 (1939); dies. Zbl. 22, 249] einer recht ersten Kritik unterzogen worden.

v. Schelling (Berlin-Charlottenburg).

Craig, Cecil C.: Note on the distribution of non-central t with an application. *Ann. math. Statist.* **12**, 224—228 (1941).

Für das Wahrscheinlichkeitsintegral der von N. L. Johnson und B. L. Welch [Biometrika **31**, 362—389 (1940); dies. Zbl. **23**, 148] eingeführten nichtzentralen t -Verteilung wird eine stark konvergente Reihenentwicklung hergeleitet. Verf. benutzt sie, um die Wirksamkeit eines von E. J. G. Pitman [J. Roy. Statist. Soc. **4**, Suppl., 119 bis 130 (1937); dies. Zbl. **19**, 35] vorgeschlagenen Kriteriums zu prüfen, das sich auf die Beurteilung der Differenz zweier arithmetischer Mittelwerte bezieht. Die numerischen Ergebnisse findet man in einer kleinen Tafel zusammengestellt. v. Schelling.

Williams, J. D.: Moments of the ratio of the mean square successive difference to the mean square difference in samples from a normal universe. *Ann. math. Statist.* **12**, 239—241 (1941).

Aus einer normal verteilten Gesamtheit (Mittelwert 0, Streuung σ^2) werde eine zeitlich geordnete Beobachtungsreihe X_1, \dots, X_n entnommen und aus ihrer Streuung

$$S^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X})^2 = \frac{2\sigma^2 B}{n} \text{ und ihrer mittleren quadratischen sukzessiven Differenz}$$

$$\delta^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} (X_j - X_{j+1})^2 = \frac{2\sigma^2 A}{n-1} \text{ der Quotient } R = \delta^2/S^2 \text{ gebildet. Mit Hilfe der}$$

charakteristischen Funktion der zweidimensionalen AB -Verteilung in Stichproben werden die Momente der Verteilung von A/B in Stichproben berechnet (sie sind merkwürdigerweise gleich den Quotienten der entsprechenden A - und B -Momente), aus denen sich unmittelbar die Momente von R ergeben.

M. P. Geppert.

Neumann, J. von, R. H. Kent, H. R. Bellinson and B. I. Hart: The mean square successive difference. *Ann. math. Statist.* **12**, 153—162 (1941).

Es seien x_1, \dots, x_n zeitlich aufeinanderfolgende Beobachtungswerte. Zur Ausschaltung einer zeitlichen Änderung (Trend) des wahren Mittelwertes der Gesamtheit, durch welche die Schätzung der Streuung der Gesamtheit mittels der Streuung s^2 der Stichprobe verfälscht würde, wird als geeignetere Schätzung die aus der Ballistik

$$\text{stammende „mittlere quadratische sukzessive Differenz“ } \delta^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2$$

empfohlen. Wird die Beobachtungsreihe einer normal verteilten Gesamtheit entnommen, so läßt sich die Verteilung der Größe δ^2 in Stichproben nur für $n = 2$ (dann ist $\delta^2 = 4s^2$) und $n = 3$ exakt angeben. Für beliebiges n lassen sich jedoch die Momente exakt berechnen; aus den ersten vier Momenten gewinnt man als Näherungsdarstellung der δ^2 -Verteilung eine Pearson-Kurve Typ VI, deren Wahrscheinlichkeitsintegral sich mittels der von K. Pearson tabulierten unvollständigen Beta-Funktionen berechnen läßt.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

MacStewart, W.: A note on the power of the sign test. *Ann. math. Statist.* **12**, 236—239 (1941).

N nicht verschwindende Größen, von denen x positiv und $N - x$ negativ sind, seien einer Gesamtheit entnommen, für welche die Annahme H_0 zu prüfen ist, daß x in unabhängigen Stichproben der Binomialverteilung $(1/2 + 1/2)^N$ um $N/2$ folge. Ist r die kleinere der Zahlen x , $N - x$ und ε die zugrunde gelegte Zufallsziffer, so wird H_0 abgelehnt, sobald r kleiner als eine durch N und ε bestimmte Grenze $r(\varepsilon, N)$ ist. Die Wahrscheinlichkeit, H_0 abzulehnen, wenn in Wahrheit H_1 gilt, d. h. x der binomischen Verteilung $(p + q)^N$ mit $p = p_1 \neq 1/2$ folgt, heißt Beweiskraft („power“) der H_0 -Prüfung in bezug auf H_1 . Ist $|p_2 - 0,5| > |p_1 - 0,5|$, so ist die Beweiskraft P_2 der H_0 -Prüfung in bezug auf H_2 ($p = p_2$) größer oder gleich der Beweiskraft P_1 in bezug auf H_1 ($p = p_1$), wenn ε und N in beiden Fällen gleich ist. In bezug auf dasselbe H_1

ist bei gleichem N die Beweiskraft P_2 bei einer Zufallsziffer ε_2 größer oder gleich P_1 mit ε_1 , wenn $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, und bei gleichem ε die Beweiskraft P_2 mit N_2 größer oder gleich P_1 mit N_1 , wenn $N_2 > N_1$. Verf. gibt eine Tabelle, aus der für $\beta = 0,05; 0,1; \dots; 0,95; 0,99$ und $p_1 = 0,60; 0,65; \dots; 0,95$ einerseits der kleinste Stichprobenumfang N abzulesen ist, für welchen bei einer Zufallsziffer $\varepsilon = 0,05$ die Beweiskraft des H_0 -Tests in bezug auf H_1 ($p = p_1$) größer als β ist, andererseits der zu diesem N -Wert gehörige größtmögliche r -Wert enthalten ist.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Steffensen, J. F.: On the ω test of dependence between statistical variables. Skand. Aktuarie Tidskr. **24**, 13—33 (1941).

Verf. untersucht die Eignung des von ihm früher [Biometrika **26**, 251—255 (1934); dies. Zbl. **9**, 221] vorgeschlagenen Abhängigkeitsmaßes

$$\omega = \frac{2 \cdot \sum (p_{ij} - p_{i*} p_{*j})}{\sum (p_{ij} - p_{i*} p_{*j}) + 1 - \sum p_{ij}^2}$$

für kontinuierliche Verteilungen; hierbei ist p_{ij} die Wahrscheinlichkeit für $x = x_i$, $y = y_j$, ferner $p_{i*} = \sum_j p_{ij}$, $p_{*j} = \sum_i p_{ij}$ und \sum bedeutet Summierung über alle i, j ,

für die $p_{ij} > p_{i*} p_{*j}$ ist. Es wird untersucht, wieweit ω auch für kontinuierliche Verteilungen seine 3 Haupteigenschaften bewahrt, nämlich stets zwischen den Grenzen 0 und 1 zu liegen und dann und nur dann den Wert 0 bzw. 1 anzunehmen, wenn x und y voneinander unabhängig bzw. durch eine funktionale Beziehung verknüpft sind. Im Falle der zweidimensionalen Normalverteilung ist ω mit dem Korrelationskoeffizienten ρ durch die Beziehung

$$\omega = \frac{2F(\rho)}{1 + F(\rho)} \quad \text{mit} \quad F(\rho) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_1^\infty \left(\frac{1}{t - \rho} - \frac{1}{t} \right) \cdot \frac{(1 - \rho^2)^{\frac{t}{2}}}{\sqrt{t^2 - 1}} dt$$

verbunden. $F(\rho)$ wird ferner nach oben und unten abgeschätzt und zu seiner näherungsweisen Berechnung wird eine rasch konvergierende Entwicklung für $F(\rho)$ angegeben.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Steffensen, J. F.: On the coefficient of correlation for continuous distributions. Skand. Aktuarie Tidskr. **24**, 1—12 (1941).

Verf. untersucht die sehr umfassende, u. a. die Bravais'sche Normalverteilung enthaltende Klasse zweidimensionaler Verteilungen der Form:

$$f(x, y) = K \cdot f_1(a_1 x + b_1 y) \cdot f_2(a_2 x + b_2 y)$$

und beweist, daß für sie der Korrelationskoeffizient ρ folgende Eigenschaften hat: $\rho = 0$ dann und nur dann, wenn x und y stochastisch unabhängig sind, $\rho \rightarrow +1$ oder $\rho \rightarrow -1$ dann und nur dann, wenn die Verteilung gegen strenge funktionale Abhängigkeit der Variablen x, y strebt.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Höfding, Wassilij: Maßstabinvariante Korrelationsmasse für diskontinuierliche Verteilungen. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforschg **7**, 49—70 (1941).

Verf. überträgt die von ihm entworfene maßstabinvariante Korrelationstheorie (dies. Zbl. **24**, 56) auf diskontinuierliche Verteilungen, indem er einmal die diskontinuierliche zweidimensionale Verteilung durch Interpolation in eine kontinuierliche überführt, die er dann wie eine solche normiert, bzw. indem er durch arithmetische Mittelbildung der Klassengrenzen und Summenwahrscheinlichkeiten eine neue diskontinuierliche Verteilung bildet. Der dem zweiten Verfahren entspringende normierte Korrelationskoeffizient ρ^* deckt sich im Falle der Doppelalternative mit dem gewöhnlichen, im Falle einer „Rangverteilung“ (d. h. ein beobachteter Wert in jedem Klassenintervall) mit dem Spearmanschen Rangkorrelationskoeffizienten. Wie im kontinuierlichen Fall wird auf Grund des ersten Verfahrens ein neues, nur auf quantitative Merkmale anwendbares Abhängigkeitsmaß $\bar{\Phi}$ erklärt, welches dieselben Eigenschaften aufweist wie im kontinuierlichen Fall und der K. Pearsonschen mittleren quadratischen

Kontingenz φ^2 , dem Kontingenzkoeffizienten C und der Tschuprowschen Maßzahl T trotz seiner umständlichen Berechnung aus verschiedenen Gründen überlegen ist.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Tintner, Gerhard: *The analysis of economic time series.* J. Amer. Statist. Assoc. 35, 93—100 (1940).

Besprechung neuerer Methoden zur statistischen Untersuchung ökonomischer Zeitreihen.

Herman Wold (Stockholm).

Richter, Hans: *Zur Ausgleichung der Beobachtungsreihen.* Mh. Math. Phys. 50, 14—26 (1941).

Sind Vektoren f_1, f_2, \dots, f_n mit den Gewichten λ_α^2 gegeben und sind im homogenen Fall n Vektoren g_1, \dots, g_n derart zu finden, daß $\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha^2 (f_\alpha - g_\alpha)^2$ zu einem Minimum wird bzw. im inhomogenen Fall $n+1$ Vektoren g_0, g_1, \dots, g_n so zu finden, daß $\sum_{\alpha=1}^n \lambda_\alpha^2 (f_\alpha - g_0 - g_\alpha)^2$ zu einem Minimum wird, so wird von einem Approximationsproblem der Ordnung k gesprochen, wenn verlangt wird, daß k unter den g_1, \dots, g_n unabhängig sind. Im inhomogenen Fall kann man stets $g_0 = \bar{f} = \frac{\sum \lambda_\alpha^2 f_\alpha}{\sum \lambda_\alpha^2}$ wählen.

Durch $f_\alpha^* = \lambda_\alpha (f_\alpha^* - \bar{f})$ wird dann der inhomogene Fall auf den homogenen Fall mit den Gewichten 1 zurückgeführt. Bezeichnet man mit h_μ die zur Länge 1 normierten Eigenvektoren der Transformation $Ax = \sum_\alpha (x f_\alpha) f_\alpha$ mit den größten Eigenwerten τ_μ , so hat die homogene Approximation der Ordnung k mit den Gewichten 1 die Form $g_\nu = \sum_\mu (f_\nu, h_\mu) h_\mu$; die Reste $f_\nu - g_\nu$ sind orthogonal zu den g_ν ; die Quadratsumme der Reste ist: $\sum_\nu f_\nu^2 - \sum \tau_\mu$. — Die Approximation k -ter Ordnung wird durch k

Approximationen erster Ordnung, die auf die verbleibenden Reste angewendet werden, gewonnen. Ist $f_{\nu\lambda} = (f_\nu, f_\lambda)$ und $B = \|f_{\nu\lambda}\|$, ist dann b ein Eigenvektor von B zum Eigenwert $\tau > 0$, so ist $h = \sum d_\lambda f_\lambda$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert τ . Ist für alle μ $h \perp f_\mu$, so ist h ein Eigenvektor von A zum Eigenwert Null. Man hat also nach Berechnung der Eigenvektoren von B $b^{(\mu)} = (d_1^{(\mu)} \dots d_n^{(\mu)})$ die Darstellung $g_\nu = \sum_\mu d_\nu^{(\mu)} \sum_\lambda d_\lambda^{(\mu)} f_\lambda$.

Aus diesen vorbereitenden Sätzen folgt dann: sind $f_1(x), \dots, f_n(x)$ die beobachteten Funktionen und $b = (d_1, \dots, d_n)$, $b^2 = 1$, der Eigenvektor, der zum größten Eigenwert der Matrix $B = \|f_{\nu\mu}\|$, $f_{\nu\mu} = \int_a^b f_\nu(x) f_\mu(x) dx$, gehört, dann sind die Funktionen $g_\nu(x) = d_\nu \sum_\lambda d_\lambda f_\lambda(x)$ die beste Approximation 1. Ordnung. Anschließend wird ein Iterationsverfahren zur Berechnung von b entwickelt und seine Konvergenz gezeigt.

F. Knoll (Wien).

Ono, Katudi: *Eine Ausgleichungsmethode der statistischen Reihen.* Jap. J. Math. 17, 117—126 (1940).

Eine statistische Reihe von n Werten soll durch eine ausgeglichene Reihe ersetzt werden, die einerseits möglichst wenig von der gegebenen Reihe abweichen, andererseits die Unebenheiten der gegebenen Reihe weitgehend beseitigen soll. Diesen Forderungen wird mathematisch dadurch genügt, daß die Summe von zwei Quadratsummen ein Kleinstwert sein soll: der Quadratsumme der Abweichungen der ausgeglichenen Werte von den entsprechenden gegebenen Werten, und der Quadratsumme der zweiten Differenzen der ausgeglichenen Wertereihe. Die ausgeglichenen Werte werden aus einem System von n linearen Gleichungen erhalten, das durch schrittweise Näherung aufgelöst wird. Das geschilderte Verfahren wird auf Sterblichkeitsziffern angewendet, die aus Erhebungen in Japan aus den Todesfällen im 11. bis zum 40. Lebensjahr erhalten

wurden. Gegenüber einer entsprechenden Ausgleichung des gleichen Zahlenmaterials nach dem Verfahren von E. Blaschke ergibt sich eine Verringerung der beiden genannten einzelnen Quadratsummen um 15% bzw. um 25%. — Der Gedanke des hier angegebenen Ausgleichungsverfahrens ist nicht neu. *H. Schmehl* (Potsdam).

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

● **Rashevsky, Nicolas:** *Advances and applications of mathematical biology.* (Univ. of Chicago Science Ser.) Chicago: Univ. of Chicago press a. Cambridge: Univ. press. 1940. XIII, 214 pag. 12/-.

● **Kostitzin, V. A.:** *Mathematical biology.* Translat. from the French by **Theodore H. Savory.** London, Bombay a. Sydney: George G. Harrap & Co. 1939. 238 pag. 7/6.

Borel, Émile: *Théorie de l'hérédité: définitions et problèmes.* C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 777—780 (1941).

Verf. gibt eine mathematische Schematisierung des einfachsten Mendelschen Vererbungsvorgangs ohne Berücksichtigung von Koppelung und Faktorenaustausch und ohne Bezugnahme auf das Erscheinungsbild. In dieser „mathematischen Biologie“ skizziert er einige Probleme, z. B. die Frage nach der Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einer Bevölkerung festen Umfangs ein Individuum nach n Generationen keine erbmäßigen Nachfahren hat; sie hat Analogie zum Problem des Ruins eines Spielers.

Harald Geppert (Berlin).

Borel, Émile: *Sur certains problèmes d'hérédité connexes au problème de la ruine des joueurs.* C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 821—825 (1941).

Beim Problem des Ruins des Spielers, der n aufeinanderfolgende Partien mit a Gewinnen und b Verlusten ($a + b = n$) bei beschränktem Vermögen $c (\leq b)$ spielt, kann man die Abzählung der möglichen Partien mittels eines dem Pascalschen Dreieck nachgebildeten Schemas vornehmen; in die Rechnung gehen dann Polynome vom

Typus $P_{2n+1}(x) = \frac{1}{2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \sum_{\nu=0}^n \binom{2\nu}{\nu} x^\nu (1-x)^\nu$ ein, die für $n \rightarrow \infty$ gegen 1, $\frac{1}{2}$

oder 0 streben, je nachdem $x >$, $=$ oder $< \frac{1}{2}$ ist ($0 \leq x \leq 1$). Die gleiche Frage tritt bei der Betrachtung der biologischen Nachkommen eines Individuums in einer abgeschlossenen Bevölkerung auf; da aber bei den entsprechenden Abzählungen Inzucht nicht berücksichtigt wird, kann das Paradoxon eintreten, daß die Nachkommenschaft eines Individuums mit einer positiven Wahrscheinlichkeit nicht erlischt, während der Umfang der Gesamtbevölkerung gegen Null strebt.

Harald Geppert (Berlin).

Scholz, Edmund: *Ein methodischer Beitrag zur Berechnung des Erbgefüges.* Deutsche Math. **6**, 100—104 (1941).

Verf. entwickelt ein neues Verfahren, um das Erbgefüge einer Sippe bezüglich einer allelen Genreihe x_1, \dots, x_r , das Geppert und Koller (Erbmathematik 1938; dies. Zbl. **18**, 322) mittels der Matrizenrechnung berechnet haben, zu finden. Die Verteilung der Genotypen $(x_i x_k)$ sei durch die quadratische Form $Q = \sum_{i,k=1}^r a_{ik} x_i x_k$,

$\left(\sum_{i,k} a_{ik} = 1\right)$, die der Gene durch die zugehörige Linearform $\bar{Q} = \sum_{i=1}^r a_i x_i$; $a_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r (a_{ik} + a_{ki})$

beschrieben. Ist Q das Produkt zweier Linearformen $L_1 = \sum_{i=1}^r u_i x_i$, $L_2 = \sum_{k=1}^r v_k x_k$ mit

$\sum_{i=1}^r u_i = 1$ (also $\sum_{k=1}^r v_k = 1$), so ist $\bar{Q} = \frac{1}{2}(L_1 + L_2)$ (dies ist die richtige Fassung eines

vom Verf. falsch ausgesprochenen Satzes). Dieser Fall tritt immer ein, wenn es sich um das Sippengefüge in einer wahllos durchgemischten beständigen Bevölkerung mit der Gen- bzw. Genotypenverteilung $\bar{N} = \sum_{i=1}^r n_i x_i$ bzw. $N = \bar{N}^2$ handelt. Für die Geno-

typenverteilung der n -ten Kindergeneration $Q^{(n)}$ gilt z. B. $Q^{(n)} = \bar{Q}^{(n-1)} \cdot \bar{N}$, also $\bar{Q}^{(n)} = \frac{1}{2} (\bar{Q}^{(n-1)} + \bar{N})$, also $\bar{Q}^{(n)} - \bar{N} = \frac{1}{2^n} (\bar{Q}^{(0)} - \bar{N})$, worin das sog. Hältungsgesetz beschlossen ist. Ähnliche Zerlegungen für die Vorfahren- und Seitenlinien führen zur raschen Aufdeckung aller Gesetze des Sippengefüges. *Harald Geppert.*

Scholz, Edmund: Die Auflösung eines gewissen linear homogenen Systems von Rückschlußformeln und ihre Anwendung auf Probleme der Inzucht. Deutsche Math. **6**, 104—107 (1941).

Die Berechnung der Genotypenverteilung eines einortigen Merkmals in aufeinanderfolgenden Generationen bei Inzuchtproblemen führt auf Rückschlußformeln für Zahlenfolgen vom Typus (1) $x_i^{(n+1)} = \sum_{k=1}^r a_{ik} x_k^{(n)}$, ($i = 1, \dots, r$). Verf. macht auf ein längst

bekanntes Verfahren zur Lösung dieser Differenzgleichungen, das auf der Hauptachsentransformation der Matrix $a_{ik} = \mathfrak{A}$ und entsprechend den Lösungen der Gleichung $\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{E} = 0$ beruht, aufmerksam und gibt diese Transformation für die Systeme (1) an, die bei Geschwister- bzw. Eltern-Nachkommeninzucht auftreten (vgl. Geppert-Koller, Erbmathematik 1938; dies. Zbl. **18**, 322). *Harald Geppert.*

Ludwig, Wilhelm, und Charlotte Boost: Vergleichende Wertung der Methoden zur Analyse rezessiver Erbgänge beim Menschen. (Zool. Inst., Univ. Halle a. d. S.) Z. menschl. Vererbgs- u. Konstit.lehre **24**, 577—619 (1940).

Im ersten Teil führt W. Ludwig aus, daß im Schrifttum acht Methoden nebeneinander benutzt werden, um die Spaltungsziffern eines Erbmerkmals an Familienmaterial zu untersuchen, welches durch Auslese von Familien mit mindestens einem merkmalttragenden Kind gewonnen ist. Die Wertung der Methoden erfolgt durch Vergleich ihrer mittleren Fehler. Verf. verwendet die Terminologie von R. A. Fisher. — Ch. Boost entwickelt die verschiedenen Methoden ausführlich. Sie erkennt die Identität der Methoden von Bernstein, Macklin, Lenz, Hogben, bei denen für eine bestimmte Spaltungsziffer der durch die Materialauslese bestimmte Erwartungswert der Merkmalshäufigkeit berechnet wird. Bei Methoden von Haldane und Fisher wird nach der gleichen Formel umgekehrt aus der empirischen Merkmalshäufigkeit auf die zugrunde liegende Ziffer geschlossen. Bei unterschiedlicher Familiengröße ist die Auswertung langwierig; die Rechnung mit der durchschnittlichen Kinderzahl ist unsicher. — Bei der Geschwistermethode wird die Merkmalshäufigkeit unter den Geschwistern der Merkmalsträger bestimmt, da das Auftreten eines Merkmals bei einem Individuum innerhalb einer Familie unabhängig vom Auftreten bei seinen Geschwistern ist. Die Formeln über Erwartungswert und mittleren Fehler sind von v. Mises abgeleitet. Der Vergleich der mittleren Fehler fällt zugunsten der erst-erwähnten Methodengruppe aus, was auch an ausführlich durchgerechneten Beispielen näher gezeigt wird. — Wenn die Auslese nicht die Familien im ganzen erfaßt, sondern auf die einzelnen Kinder gerichtet ist, wie es in der Praxis sehr häufig vorkommt, können alle Methoden so modifiziert werden, daß unter Voraussetzung einer einheitlichen Erfassungswahrscheinlichkeit für alle Merkmalsträger sich eine korrekte Zahlenprüfung ergibt (Weinberg, Geiringer, Fisher, Lenz). Auf die Prüfung der Voraussetzung der einheitlichen Erfassungswahrscheinlichkeit und das Vorgehen bei der praktisch häufigen Nichterfüllung dieser Bedingung gehen Verf. nicht ein. *S. Koller.*

Schelling, Hermann von: Über die exakte Behandlung des Zusammenhanges zwischen biologischen Merkmalsreihen. Arb. Staatl.-Inst. exper. Ther. Frankf. H. **39**, 35—71 (1940).

Inhalt: 1. Quadratische und rechtwinklige Kontingenztafeln. 2. Der Spezialfall der 2×2 -Tafel und das Differenzenproblem. 3. Dreieckige Kontingenztafeln. 4. Ausdehnung auf mehrere Merkmalsreihen. — Verf. hat 1935 ein Verfahren zur Beurteilung von Zusammenhängen (T -Verfahren) entwickelt, das hier erneut dargestellt und ausgebaut wird. Die Prüfung eines statistischen Zusammenhanges in einer quadratischen

Vielfeldertafel wird dabei an der Summe der Zahlen in der Hauptdiagonalen durchgeführt. Erwartungswert und Streuung werden für die Hypothese der Unabhängigkeit aus den Randsummen der Tafel berechnet. Nichtquadratische Tafeln werden durch Nullreihen auf die quadratische Form gebracht. (Dadurch, daß die Ergänzung stets an mehreren Stellen angebracht werden kann und dadurch andere Hauptdiagonalen entstehen, verliert das Verfahren in diesen Fällen seine Eindeutigkeit.) Für eine 2×2 -Tafel stimmt das Verfahren praktisch mit Pearsons χ^2 -Kriterium und mit der Beurteilung des Korrelationskoeffizienten überein; es gilt dann

$$T^2 = \frac{N-1}{N} \cdot \chi^2 = r^2(N-1).$$

Das Differenzenproblem (statistische Sicherung eines Unterschiedes zwischen zwei beobachteten Häufigkeiten) wird auf die 2×2 -Tafel zurückgeführt, worin Verf. die endgültige Lösung sieht. — Erstmals werden dann dreieckige Tafeln behandelt, in denen auf einer Seite der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen. Derartige Aufgaben sind in der praktischen Statistik bisher i. a. durch Umformung auf ein anderes Schema behandelt worden. Eine 3×3 -Tafel wird durch Fortfall eines Eckwertes auf den gewöhnlichen 2×2 -Fall zurückführbar, für umfangreichere Tafeln treten neue Formeln auf, die für den Fall einer dreieckigen 4×4 -Tafel abgeleitet werden. — Das Verfahren umfaßt auch die Zusammenhangsprüfung in 3- und mehrdimensionalen Tafeln. Die Formeln sind allgemein abgeleitet und auf geschickt gewählte biologische Beispiele angewandt.

S. Koller (Berlin).

Schroeder, Arnold: Über die Norm in der Medizin und ihre Ermittlung mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsnetzes. (*Hyg. Inst., Med. Akad., Düsseldorf.*) Z. menschl. Vererbgs- u. Konstit.lehre **24**, 665—685 (1940).

Der Normbereich wird variationsstatistisch definiert; entsprechend einem Vorschlage Beckels werden Werte als „normal“ angesehen, die zwischen dem 5%- und dem 95%-Wert der Summenreihe der Häufigkeitsverteilung liegen, als normal im engeren Sinne, was zwischen dem 25%- und dem 75%-Wert liegt. Bei der Auswertung wird die graphische Darstellung mittels des Wahrscheinlichkeitsnetz-Papiers gewählt, bei dem die Summenkurve der Gaussverteilung geradlinig wird. Bei asymmetrischen Verteilungen werden die Messungswerte logarithmiert und dadurch häufig geradlinige Summenkurven erzielt. Nach der Bearbeitung einiger Messungsreihen und Körpergrößen, Herzgröße, Blutdruck, Brustumfang u. a. schließt Verf.: „Die Normalverteilung scheint für medizinische Kollektive ein allgemein gültiger Grundsatz zu sein.“ Verteilungen, die weder linear noch logarithmisch durch das Gaussgesetz darzustellen sind, werden kurzerhand als inhomogen bezeichnet, während die Verteilungen mit gelungener Annäherung sachlich als homogen angesehen werden. Leider kann nach Untersuchungen an wesentlich umfangreichem Material eine so einfache Auffassung von der Allgemeingültigkeit der Gaussverteilung auf biologischem Gebiet nicht aufrechterhalten werden.

S. Koller (Berlin).

Hadwiger, H., und W. Ruchti: Darstellung der Fruchtbarkeit durch eine biologische Reproduktionsformel. Arch. math. Wirtsch.- u. Sozialforsch **7**, 30—34 (1941).

In der in dies. Zbl. **24**, 57 besprochenen Arbeit hatten Verf. für die Reproduktionsfunktion einer biologischen Gesamtheit den analytischen Ausdruck

$$\Phi(x) = Ax^{-3/2} \exp\left(-\frac{B}{x} + Cx\right)$$

[vgl. Formel (3) des Referates] erhalten. Hier zeigen sie an der Reproduktion der Schweizer Frauen 1937, daß $\Phi(x)$ die tatsächliche Reproduktionskurve bei passender Wahl der Konstanten A, B, C mit guter Genauigkeit wiedergibt. An der Tafel der statistischen und theoretischen Werte von $\int_1^{i+1} \Phi(x) dx = \text{Zahl der von einer Frau im Altersintervall}$

$t \dots t + 1$ lebendgeborenen Töchter sieht man, daß für $t > 45$ die theoretischen Werte erheblich über den (verschwindenden) tatsächlichen liegen. *Harald Geppert.*

Hadwiger, H.: Eine Formel der mathematischen Bevölkerungstheorie. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. **41**, 67—73 (1941).

$G(t)$ sei die Dichte der weiblichen Lebendgeborenen zur Zeit t , $p(\xi)$ ihre Erlebenswahrscheinlichkeit zum Alter ξ , $f(\xi)$ die auf eine Frau des Alters ξ bezogene Dichte der weiblichen Lebendgeborenen. Für den Bevölkerungstheoretiker ist dann $G(t)$ für $t \leq 0$ bekannt und für $t > 0$ aus der Integralgleichung

$$(1) \quad G(t) = \int_0^{\infty} G(t - \xi) K(\xi) d\xi; \quad K(\xi) = p(\xi) f(\xi)$$

zu bestimmen. Eine allgemeine Lösung hat Verf. nach der Methode der Laplaceabbildung früher (dies. Zbl. **22**, 50) angegeben. Sie wird in geschlossener Form ausführbar, wenn man für $K(\xi)$ die spezielle Form $K(\xi) = A \xi^n \exp(-a\xi)$, $A > 0$, $a > 0$, $n > 0$ ganz, annimmt, die nach einer Arbeit von Hadwiger und Rucht i (dies. Zbl. **22**, 374) die wirklichen Verhältnisse gut wiedergibt. Man braucht dann von $G(t)$, ($t \leq 0$) nur die $n + 1$ -Momente

$$M_\nu = \int_0^{\infty} G(-t) t^\nu \exp(-at) dt, \quad (\nu = 0, 1, \dots, n)$$

u kennen. Bezeichnen $\omega_0, \dots, \omega_n$ die $n + 1$ -ten Einheitswurzeln, und setzt man $= (n! A)^{\frac{1}{n+1}}$, so lautet dann die Lösung von (1)

$$G(t) = \frac{e^{-at}}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \sum_{\lambda=0}^n \frac{M_\nu}{\nu!} (\varrho \omega_\lambda)^{\nu+1} e^{\varrho \omega_\lambda t}.$$

Je nachdem das Reproduktionsintegral

$$\int_0^{\infty} K(\xi) d\xi = a^{-n-1} A n!$$

größer oder kleiner als 1 ausfällt, nimmt dieses $G(t)$ also exponentiell zu oder ab.

Harald Geppert (Berlin).

Burkhardt, Felix: Über Stand und Wandlungen von bevölkerungs- und versicherungsstatistischen Personengesamtheiten. Bl. Versich.-Math. **5**, 212—227 (1941).

In dieser Darstellung der Statik und Dynamik der statistischen Gesamtheiten werden zuerst die Begriffe des stationären, progressiven und degressiven Altersaufbaues aufgeklärt, die Beziehungen zwischen Geburtenziffer, mittlerer Lebensdauer der Neugeborenen und der Sterbeziffer abgeleitet und mit Hilfe der Aufstellungen des statistischen Reichsamtes aus dem Jahre 1933 illustriert. Das Standardisierungsverfahren wird für die drei Fälle des funktionellen Zusammenhanges, der stochastischen Verbundenheit und stochastischen Unabhängigkeit entwickelt. Dann werden die Formeln für den Umfang der Personengesamtheiten bei konstanter absoluter und relativer Personenzunahme abgeleitet und Methoden der Vorausberechnung der Personenzahl angeführt. Bei der Behandlung der Zugänge zu Personengesamtheiten werden die statistischen Fragen der Berufslenkung erörtert, die Wellennatur des Verlaufes und die Dämpfung der wellenförmigen Bewegung der Eintrittszahlen, die zum Grenzwert $E = P/\bar{e}$ strebt, erklärt. Der Abgang aus Personengesamtheiten wird für den Fall des Wirkens von zwei Ausscheidursachen studiert und am Beispiel aus der Invaliditätsversicherung wird die Frage entschieden, ob die Zunahme der Invalidisierungswahrscheinlichkeit eine echte oder nicht bloß eine Folge des Sterblichkeitsrückganges sei. Die Richtigkeit dieser Beziehung wird auch durch Berechnung der Näherungswerte der periodischen Kettenbrüche, durch welche die unabhängigen Wahrscheinlichkeiten aus relativen Häufigkeiten bestimmt werden, bestätigt. *Janko (Prag).*

Jecklin, Heinrich: Die Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. **41**, 39—66 (1941).

Referat über das erste Thema des für 1940 vorgesehenen, zufolge der Zeitumstände nicht stattgefundenen internationalen Kongresses der Versicherungsmathematiker. Das Referat gibt eine gedrängte Übersicht über die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie in ihrer Beziehung zum Versicherungswesen, sowie deren gegenwärtigen Stand unter Berücksichtigung der durch die Kongreßabhandlungen zeitigten Ergebnisse. *W. Simonsen.*

● **Johansen, Paul, und Poul Ørding:** Elementare Lebensversicherungsmathematik. København: G. E. C. Gads Forlag 1940. 127 S. [Dänisch].

Das im Auftrage des dänischen Aktuarvereins herausgegebene Bändchen gibt eine Einführung in die wichtigsten Teile der Versicherungsmathematik, in dem nur die Anfangsgründe der Infinitesimalrechnung vorausgesetzt werden. — Die einzelnen Abschnitte des Buches sind: 1. Zinsrechnung. 2. Absterbeordnungen. 3. Rentenversicherungen. 4. Kapitalversicherungen. 5. Prämien. 6. Prämienreserven. 7. Rückkauf, prämienfreie Policen, Policendarlehen. 8. Änderungen. 9. Bonus. 10. Invaliditäts- und Pensionsversicherungen. 11. Rückversicherung. *W. Simonsen.*

Haafien, M. van: Johann de Witts Formel für zeitlich beschränkte Leibrenten. Verzekeerings-Arch. **22**, 282—284 (1941) [Holländisch].

Verf. weist auf die formale Analogie zwischen der Darstellung der Leibrente als Summe der diskontierten Überlebenswahrscheinlichkeiten $\sum_{n=1}^{\omega} {}_n p_x \cdot A_{\overline{n}|}$ einerseits und durch die Formel de Witts $\sum_{n=1}^{\omega} {}_n |q_x \cdot a_{\overline{n}|}$ andererseits hin. Die Analogie besteht nur für lebenslängliche Renten, da bei der abgekürzten Rente im letzten Summanden der Formel de Witts an die Stelle der Sterbenswahrscheinlichkeit die Überlebenswahrscheinlichkeit tritt. *Hasso Härten (Leipzig).*

Stern, E.: Leibrenten und veränderliche Todesfallsversicherungen. Verzekeerings-Arch. **22**, 285—318 (1941).

Auf Grund der bekannten Tatsache, daß jede Todesfallversicherung durch Leibrenten ausgedrückt werden kann, werden in dieser Abhandlung solche Todesfallversicherungen betrachtet, bei denen der versicherte Betrag gleich dem Schlußwert oder Anfangswert einer Annuität ist, deren Dauer von der vorher durchlebten Zeit abhängt. In der Form der Lösung einiger Examensaufgaben werden Leibrenten als Summen von Annuitäten und als veränderliche Todesfallversicherungen ausgedrückt. Mit Hilfe dieser Beziehungen wird darauf die Versicherung der Rückgewähr von Prämien oder sonstigen Einlagen mit Zinseszins behandelt, und zwar, wenn die Aufzinsung der zurückgewährten Einlagen zum Zinsfuß des Tarifs oder zu anderem Zinsfuß erfolgt. Von diesen Fällen, in denen die Auszahlung dem Schlußwert einer Annuität gleich war, wird zu denen übergegangen, wo der Anfangswert einer Annuität versichert ist; das sind besonders die Erbrenten und die Versicherung zur Tilgung einer Schuld.

Janko (Prag).

Heer, W. J. C. de: Über Leibrenten, die bis zum letzten Sterbensfall laufen, bei einer nicht kleinen Anzahl von Teilnehmern. Verzekeerings-Arch. **22**, 277—281 (1941) [Holländisch].

Das klassische Verfahren, Leibrenten auf mehrere Leben, die bis zum letzten Todesfall laufen, auf Verbindungsrenten auf den ersten Todesfall zurückzuführen, wird bei einer nicht ganz kleinen Zahl von Leben praktisch unbrauchbar. Verf. zeigt an einem von ihm durchgerechneten Beispiel aus der Praxis (15 Leben), wie man einfach zum Ziel kommt. Er geht davon aus, daß die Wahrscheinlichkeit, der letzte Todesfall trete innerhalb n Jahren ein, ${}_n q_{\overline{x_1 x_2 \dots x_{15}}}$, gleich dem Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten ${}_n q_{x_i}$ ist, und bildet die Rente als Summe der diskontierten Überlebenswahrscheinlichkeiten ${}_n p_x \cdot A_{\overline{n}|}$. Es ergibt sich dabei, 1. daß für eine gewisse Zahl m (im Beispiel $m = 35$) die ${}_i q_{\overline{x_1 x_2 \dots x_{15}}}$, $i < m$, vernachlässigt werden können; 2. daß infolge-

dessen die Teilnahme älterer Personen (im Beispiel mit Sterbetafel auf Endalter 105 für $x_i \geq 70$) keinen Einfluß auf den Wert der Rente hat; 3. daß die Wahl der Sterbetafel keinen wesentlichen Einfluß auf die Rente hat. *Hasso Härten* (Leipzig).

Kalkanis, J. F.: Über eine Formel der Versicherungsmathematik. Bull. Soc. Math. Grèce 20, 66—78 (1940) [Griechisch].

Der Verf. behandelt, angeregt durch das Studium der Lage einer Pensionskasse des Prof. Sakellariou, einen allgemeinen Fall für die Pension, die am häufigsten in den Beamtenversicherungskassen vorkommt. Die Witwe eines Versicherten einer Sozialversicherung soll eine monatliche Pension bekommen, wenn der Tod des Versicherten nach dem Ablauf des $(x+n)$ -ten Jahres eintritt. Der Lohn des Versicherten während des $(x+n)$ -ten Jahres betrage M_n , und die jährliche Steigerung sei Σ . Die Pensionen für den Todesfall für die Dauer des $(n+1)$ -ten, $(n+2)$ -ten, ..., $(n+v)$ -ten, $(n+v+1)$ -ten Jahres sind entsprechend $(\varepsilon_1 + \delta \varepsilon_1)(\mu_n + \sigma)$, $(\varepsilon_1 + 2\delta \varepsilon_1)(\mu_n + 2\sigma)$, ..., $(\varepsilon_1 + v\delta \varepsilon_1)(\mu_n + v\sigma)$, $(\varepsilon_1 + (v+1)\delta \varepsilon_1)(\mu_n + (v+1)\sigma)$, ..., wobei $\mu_n = \varepsilon M_n$, $\sigma = \varepsilon \Sigma$, ε und $\varepsilon_1 + k\delta \varepsilon_1$ gesetzlich bestimmte Prozentsätze sind. Durch die prospective Methode erhält der Verf. folgende Formel:

$$D_x^{\alpha} P_{x(y)}^{\alpha \nu (12)} = \varepsilon_1 \mu_n N_{x+n(y)}^{\alpha \nu (12)} + (\varepsilon_1 \sigma + \delta \varepsilon_1 \mu_n) (S_{x+n(y)}^{\alpha \nu (12)} - S_{x+n+v(y)}^{\alpha \nu (12)}) + \delta \varepsilon_1 \sigma \{2 \Sigma S_{x+n(y)}^{\alpha \nu (12)} - [2 \Sigma S_{x+n+v(y)}^{\alpha \nu (12)} + (2v-1) S_{x+n+v(y)}^{\alpha \nu (12)} + S_{x+n(y)}^{\alpha \nu (12)}]\}.$$

Yannopoulos (Athen).

Hagstroem, Karl-Gustav: Umwertung von Lebensversicherungsverträgen. Bl. Ver-sich.-Math. 5, 227—232 (1941).

Verf. hat früher [Z. ges. Versch.-Wiss. 41, 77—87 (1941)] eine Übersicht über die Maßnahmen der schwedischen Lebensversicherungsgesellschaften gegeben, zu denen in den letzten Jahren die sinkende Tendenz auf dem schwedischen Zinsenmarkt Anlaß gegeben hat. — Vorl. Arbeit enthält gewisse ergänzende Ausführungen, die auf eine versicherungsmathematische Behandlung der Umwertung durch Aufstellung einer technischen Bilanz nach erniedrigtem Zinsfuß zielen. *W. Simonsen* (Kopenhagen).

Adam, P. Puig: Versuch einer Theorie der abgeschlossenen Ranglisten und ihre Anwendungen auf Probleme der Verwaltung und der Voranschläge. Rev. mat. hisp.-amer., IV. s. 1, 82—103 (1941) [Spanisch].

Die wahrscheinliche Anzahl von Personen des Alters x im Beobachtungszeitpunkt t wird im allgemeinsten Falle durch $N(x, t) = l(x) \int_{\lambda}^x \frac{n(\xi, t + \xi - x)}{l(\xi)} d\xi$ gegeben, wo mit

$n(\xi, \tau)$ eine Verteilungsfunktion des Neueintrittes von ξ -jährigen Personen im Zeitpunkt τ in eine Personen- (Beamten-)Gesamtheit bezeichnet wird. Neben einer Reihe einfacherer Annahmen über $n(\xi, \tau)$ scheint besonders der Ansatz $n(\xi, \tau) = f(\tau) n_g(\xi)$ [$n_g(\xi)$ Gaußsche oder auch Pearsonsche Funktion] zweckmäßig zu sein. Nach knappen Ausführungen über die Organisation und das Vorrücken der spanischen Beamten wird die Funktion „Gehalt“ in ihrer Abhängigkeit von der Anzahl der Vordermänner ermittelt. Anschließend werden die entwickelten Begriffe auf die Berechnung der Höhe des Ruhegehaltfordernisses und Grundfragen der Pensionsversicherung angewendet. Zwei Bemerkungen über die Verteilungsfunktion $n_g(\xi)$ und über die Verwendung des Stieltjes-Integrale beschließen die Arbeit.

F. Knoll (Wien).

Hage, Joh.: Kursbestimmung von Pfandbriefen. Verzekeerings-Arch. 22, 249—254 (1941) [Holländisch].

Verf. zeigt, daß der mathematische Kurs von Pfandbriefen, die jährlich mit einem festen Satz p (z. B. 2%) der jeweiligen Restschuld ausgelost werden, $\frac{i+p}{r+p}$ ist, wo i der Zinsfuß der nominellen, r der der effektiven Verzinsung ist. Bei unterjähriger Zinszahlung wird die Formel entsprechend modifiziert. Verf. gibt eine Tafel der Kurse für die nominellen Zinsfüße 3, $3\frac{1}{2}$, ..., 7%, die effektiven Zinsfüße 3, $3\frac{1}{4}$, ..., 7% und für $p = 0,02$ bei halbjährlich nachträglicher Zinszahlung. *Hasso Härten* (Leipzig).

Zwinggi, E.: Zur Darstellung des mathematischen Wertes von Wertpapieren. Mitt. Vereinig. schweiz. Versich.-Math. 41, 75—79 (1941).

Zur Darstellung des mathematischen Wertes von Wertpapieren werden zwei prospektive und zwei retrospektive Formeln im allgemeinen Fall entwickelt und in bezug auf die zugehörige lineare Differentialgleichung untersucht. *Bruno de Finetti.*

Füßen, Peter: Eine Aufgabe der Häufigkeitsrechnung: Die Beziehung zwischen der Häufigkeitskurve des Zeitbedarfs und der Häufigkeitskurve der Leistung. Meßtechn. 17, 17—19 (1941).

Verf. behandelt die Aufgabe, aus der Häufigkeitskurve für den Zeitbedarf, die empirisch ermittelt wird, die Häufigkeitskurve für die Leistung zu bestimmen. Unter dem Zeitbedarf versteht er die für die Herstellung der Mengeneinheit erforderliche Zeit, unter der Leistung die in der Zeiteinheit hergestellte Menge, d. h. den Kehrwert des Zeitbedarfs. Zur Veranschaulichung der Berechnungen setzt er die Häufigkeitsfunktion des Zeitbedarfs als Parabel an. *F. Burkhardt (Leipzig).*

Geometrie.

Grundlagen. Nichteuclidische Geometrie:

● **Schilling, Wilhelm: Werden und Wesen der Geometrie.** (Freiburg. Universitätsreden. H. 35.) Freiburg i. Br.: Fr. Wagnersche Univ.-Buchhandl. 1941. 32 S. RM. 1.20.

Diese Rektoratsrede entwirft ein klares Bild von der problemgeschichtlichen Entwicklung der Geometrie und umreißt eine mögliche Auffassung ihres Wesens, wie sie wohl die meisten Mathematiker teilen. Es ist in der Hauptsache der Standpunkt des mathematischen Formalismus, der auch hier eingenommen wird. Die grundsätzlichen Fragestellungen um die logisch-begriffliche Begründung der Geometrie stehen im Mittelpunkt der Ausführungen. Ihre erkenntnistheoretischen Bezüge werden gestreift, ihre mögliche Tragweite für das Problem „Idee-Wirklichkeit“ wird angedeutet, wobei ein mathematischer „Empirismus“ vertreten wird. *Steck (München).*

Schilling, Friedrich: Die Extremaleigenschaften der außerhalb des absoluten Kegelschnittes gelegenen Strecken in der projektiven Ebene mit hyperbolischer Geometrie. Deutsche Math. 6, 33—49 (1941).

Ist k der einteilige Maß-Kegelschnitt einer Cayley-Kleinschen hyperbolischen Metrik und \overline{AB} eine in seinem Äußern gelegene Strecke, so wird elementar, nämlich auf Grund des Bogenelementes gezeigt, daß die Entfernung \overline{AB} reell ist, wenn (Fall I) die Verbindungsgerade $[AB]$ k in reell-getrennten Punkten schneidet, daß jedoch \overline{AB} rein imaginär ist, wenn (Fall II) die Gerade $[AB]$ k nicht reell schneidet. Legt man dann aus den Enden A und B der Strecke die Tangenten an k ($=$ Minimalgeraden), so entstehen zwei kongruente Dreiecke, deren eines ABN sei. Es sei ferner \widehat{AB} die Länge eines beliebigen (einmal stetig ableitbaren) krummen Bogens, der im Innern des Dreieckes ABN bleibt und gegen die Sehne \overline{AB} konkav ist. Dann wird elementar, nämlich auf Grund des Bogenelements, und anschaulich-geometrisch gezeigt: Im Falle I ist $\overline{AB} > \widehat{AB}$; im Falle II ist $|\overline{AB}| > |\widehat{AB}|$. — Diese einfachen metrischen Verhältnisse werden schließlich nochmals auf Grund einer Realisierung der ins Komplexe fortgesetzten Pseudosphäre abgeleitet und der Anschauung nahegebracht. *Strubecker.*

Elementargeometrie:

Loria, Gino: Nota sulla geometria del triangolo rettilineo (da una lettera diretta ad un giovane studioso). Rev. mat. hisp.-amer., III. s. 1, 15—20 (1939).

Die Eulersche bzw. Feuerbachsche Formel für die Entfernung der Mittelpunkte des Umkreises und der Berührungskreise zu einem Dreieck werden trigonometrisch abgeleitet und auch die Längen der gemeinsamen Tangenten berechnet. Die bekannten Formeln für Entfernung zweier in Dreiseit-Koordinaten (die Koordinaten sind die Ab-

stände von den Grundgeraden) gegebenen Punkte werden ebenfalls trigonometrisch und kürzer als üblich abgeleitet. *G. Hajós* (Budapest).

Coşniţa, César: Sur les paraboles inscrites à un triangle. Bul. Politehn., Bucureşti 12, 25—36 (1941).

Verf. untersucht gewisse Parabeln, die einem Dreieck eingeschrieben sind und noch irgendeine bemerkenswerte Gerade des Dreiecks berühren. Sind A' , B' , C' die Berührungspunkte eines Kegelschnitts mit den Seiten BC , CA , AB des Dreiecks ABC , so nennt Verf. den Schnittpunkt der drei Geraden AA' , BB' , CC' den Gergonneschen Punkt des Dreiecks ABC . Der Ort der Gergonneschen Punkte der dem Dreieck eingeschriebenen und eine feste Gerade berührenden Kegelschnitte ist ein durch diese Gerade bestimmter, dem Dreieck umschriebener Kegelschnitt. Ist die feste Gerade z. B. die Lemoinesche Gerade (d. h. die trilineare Polare des Lemoineschen Punktes) des Dreiecks, so ist jener Ort der Umkreis des Dreiecks. Rückt jene Gerade ins Unendliche, so sind die dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitte Parabeln, und der Ort ihrer Gergonneschen Punkte ist die erste Steinersche Ellipse, und die trilineare Polare des Gergonneschen Punktes geht durch den Dreiecksschwerpunkt. Die Einhüllende der Scheiteltangenten der eingeschriebenen Parabeln ist die Steinersche dreispitzige Hypozykloide. Die Einhüllende der Achsen der Parabeln ist ebenfalls eine dreispitzige Hypozykloide. Die beiden Kurven sind homothetisch bezüglich des Dreiecksschwerpunktes. Verf. nimmt nun einen beliebigen Punkt M im Dreieck an und stellt die Eigenschaften der vier dem Dreieck eingeschriebenen Parabeln zusammen, die die trilinearen Polaren dieses Punktes und der drei harmonisch assoziierten Punkte berühren. Ferner untersucht er die drei eingeschriebenen Parabeln, welche die Schnittpunkte der durch einen Punkt M gehenden Eckenlinien mit dem Umkreis zu Brennpunkten haben, und betrachtet insbesondere die Fälle, in denen M Umkreis- oder Inkreismittelpunkt, Höhenpunkt oder Lemoinescher Punkt des Dreiecks ist. *Max Zacharias* (Berlin).

Følner, Erling: Die Arten der durch fünf Punkte oder fünf gerade Linien bestimmten Kegelschnitte. Mat. Tidsskr. B 1941, 42—51 [Dänisch].

Verf. entwickelt notwendige und hinreichende metrische Bedingungen dafür, daß fünf Punkte auf einer Ellipse, Parabel oder Hyperbel liegen oder fünf gerade Linien eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel berühren. Im Fall eines Mittelpunktskegelschnitts führt er die fünf Punkte (die er sich durch Punkte in der Ebene der komplexen Zahlen gegeben denkt) durch eine Affinität mit einer reellen oder imaginären Verwandlungszahl in Punkte eines Kreises über. Im Fall der Parabel projiziert er die Punkte auf die Scheiteltangente, was einer Affinität mit der Verwandlungszahl Null gleichkommt. Die fünf neuen Punkte bilden ein Fünfeck, in dem im Fall der Ellipse alle Dreiecksinhalte reell, im Fall der Parabel gleich Null und im Fall der Hyperbel imaginär sind. Die Anwendung der Heronischen Inhaltsformel auf die zehn Dreiecke ergibt zehn metrische Bedingungen. Dasselbe Verfahren, auf fünf gerade Linien angewendet, von denen keine drei durch einen Punkt gehen, führt auf zehn entsprechende Bedingungen. *Max Zacharias* (Berlin).

Algebraische Geometrie:

Manara, Carlo Felice: Semplice deduzione sintetica delle proprietà metriche di una notevole cubica piana. Ist. Lombardo, Rend., III. s. 74, 37—40 (1941).

Auf einer rationalen Kubik C mit dem Knoten O sei mittels der Geraden durch einen Punkt von C eine Linearschar g_2^1 erklärt. Projiziert man deren Punktgruppen von O aus, so erhält man im Strahlenbüschel O eine Involution, die die beiden Tangenten t_1 , t_2 von C in O vertauscht. Sind diese speziell Minimalgeraden der betrachteten Ebene, so gilt für die Punkte P , P' einer beliebigen Gruppe der g_2^1 die Beziehung $\arg(OP) + \arg(OP') \equiv \text{konst.}(\text{mod } \pi)$, und daher gilt weiter für irgend drei auf einer Geraden liegende Punkte von C : $\arg(OP_1) + \arg(OP_2) + \arg(OP_3) \equiv k(\text{mod } \pi)$, wo k eine von der Geraden unabhängige Konstante bezeichnet. Die hierin liegende Analogie zum Abelschen Theorem bei elliptischen Kubiken wird vom Verf. weiter verfolgt; entsprechend dem elliptischen Fall erzeugt eine Projektivität des Strahlenbüschels O , die t_1 , t_2 zu Fixelementen hat, auf C eine Abbildung 1. Art α , eine Involution jenes Büschels, die t_1 , t_2 vertauscht, eine Abbildung 2. Art β . Sind t_1 , t_2 Minimalgeraden, so besteht zwischen Punkt und Bildpunkt bei einer α die Gleichung $\arg(OP') \equiv \arg(OP) + \text{konst.}(\text{mod } \pi)$, bei einer β : $\arg(OP) + \arg(OP') \equiv \text{konst.}(\text{mod } \pi)$. *H. Geppert*.

Corradi, Maria Virginia: *Sulle singolarità della curva Hessiana.* Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 215—218 (1941).

Die Arbeit knüpft an Untersuchungen des Ref. über die Singularitäten der Jacobischen Hyperflächen von $r + 1$ Hyperflächen des S_r und insbesondere über Singularitäten der Hesseschen Hyperfläche an (dies. Zbl. 2, 53; 3, 71; 4, 269; 5, 116, 370). Verf. beweist: Damit ein einfacher Punkt O einer ebenen algebraischen Kurve F für die Hessesche Kurve von F Doppelpunkt sei, ist notwendig und hinreichend, daß O Undulationspunkt sei und daß der Kegelschnitt, der in der zerfallenden polaren Kubik von O enthalten ist, die Tangente t an F in O berührt. *Mario Villa* (Bologna).

Du Val, Patrick: *The unloading problem for plane curves.* Amer. J. Math. 62, 307—311 (1940).

Se $O = (O_1 \dots O_q)$ è un insieme di punti infinitamente vicini nel piano e si impone alle curve algebriche piane d'ordine alto di passare per i punti O con le molteplicità virtuali rispettive $h = (h_1 \dots h_q)$, può avvenire che le molteplicità virtuali non coincidano con le effettive. Per la coincidenza occorre e basta che siano soddisfatte certe disuguaglianze, dette condizioni di prossimità, che, secondo l'A., si possono scrivere in forma compatta facendo uso della matrice m di prossimità, definita ponendo $m_{\alpha\beta} = 1$ se $\alpha = \beta$, $m_{\alpha\beta} = -1$ se O_β è prossimo (cioè nell'intorno del primo ordine) di O_α ed $m_{\alpha\beta} = 0$ negli altri casi. — Ciò posto, l'A. dimostra che se si impongono nei punti O molteplicità virtuali qualsiasi $h = (h_1 \dots h_q)$ (cioè anche non soddisfacenti alle condizioni di prossimità), le molteplicità effettive $k = (k_1 \dots k_q)$ sono del tipo $k = h + xm$, dove $x = (x_1 \dots x_q)$ è un sistema di interi positivi o nulli, che può variare. L'A. trova i possibili sistemi x e dimostra l'esistenza di un „minimo“ x^* ; ciò significa che tutte le curve con le molteplicità virtuali h son casi particolari delle curve con le molteplicità effettive $h + x^*m$. Rimangono così dimostrati in generale e precisati i principi di scaricamento e scorrimento, usati da Enriques (Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, Vol. II, 425—438; Bologna 1918).

Conforto (Rom).

Piazzolla-Beloch: *Sur le nombre des pluriséantes et sur la classification des courbes gauches algébriques.* C. R. Acad. Sci., Paris 210, 655—657 (1940).

Die Anzahl x_4 der vierfach treffenden Sekanten einer algebraischen Kurve n -ter Ordnung des Raumes ohne singuläre Punkte und mit h scheinbaren Doppelpunkten ist bekanntlich $x_4 = \frac{1}{2}h(h - 4n + 11) - \frac{1}{24}n(n - 2)(n - 3)(n - 13)$. Besitzt insbesondere die Kurve x_5 fünffach treffende Sekanten, ..., x_{n-1} $(n - 1)$ -fach treffende Sekanten, so erhält man die Gleichung

$$\binom{n-1}{4}x_{n-1} + \binom{n-2}{4}x_{n-2} + \dots + 5x_5 + x_4 = \frac{1}{2}h(h - 4n + 11) - \frac{1}{24}n(n - 2)(n - 3)(n - 13).$$

Verf. behauptet, die Lösungen dieser Gleichung, für welche die Kurven wirklich existieren, klassifiziert und diese Kurven als partielle Schnitte zweier Flächen dargestellt zu haben. *U. Morin* (Padova).

Leidheuser, R. W.: *Über die reine Darstellung algebraischer Raumkurven.* Deutsche Math. 6, 1—2 (1941).

In Anschluß an den Satz von Kronecker, daß jede Raumkurve sich als vollständiger Durchschnitt von vier Flächen darstellen läßt, hat Vahlen ein Beispiel einer Raumkurve 5. Ordnung angegeben, zu deren Darstellung vier Flächen notwendig wären. Perron hat aber (vgl. dies. Zbl. 24, 276) gezeigt, daß diese Kurve sich bereits als Durchschnitt von drei Flächen darstellen läßt. Der Autor des vorliegenden „Briefes an den Herausgeber“ versucht nun, das Vahlensche Beispiel zu retten durch Einführung des Begriffes der „reinen Darstellung“ einer Kurve. Darunter will er verstehen, „daß man als Lösungen die Punkte der Kurve erhält und jeden so oft, wie die Vielfachheit des Punktes für die Kurve angibt“. Nun ist aber die Vielfachheit

eines nicht isolierten Schnittpunktes von drei Flächen meines Wissens noch nie definiert worden, und auch der Autor gibt keine Definition dieses Begriffes. Es bleibt also unklar, was er unter einer „reinen Darstellung“ verstehen will. In den Arbeiten von Kronecker und Vahlen ist von solchen undeutlichen Begriffsbildungen selbstverständlich nirgends die Rede.

van der Waerden (Leipzig).

Campebelli, Luigi: Una costruzione proiettiva delle trasformazioni piane del De Jonquières. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 102—108 (1941).

Verf. entwickelt eine neue Konstruktion für die allgemeinste Jonquières-Abbildung n -ter Ordnung J_n zwischen zwei Ebenen π, π' . Bekanntlich hat eine solche in π (und analog in π') einen $n - 1$ -fachen Grundpunkt O und weitere $2n - 2$ einfache Grundpunkte $A_1 \dots A_{2n-2}$ (bzw. $O', A'_1 \dots A'_{2n-2}$). Man konstruiere nun das Büschel C der irreduziblen Kurven $n - 1$ -ter Ordnung in π , die in O einen $n - 2$ -fachen und in $A_2 \dots A_{2n-2}$ je einen einfachen Punkt haben, und beziehe die Elemente von C durch eine Projektivität Ω auf die Geraden durch A'_1 , die Geraden durch O mittels einer Projektivität ω auf die Geraden durch O' ; so wird jedem allgemeinen Punkt P aus π eindeutig ein Punkt P' aus π' zugeordnet, und dies ist die allgemeinste J_n . Durch Betrachtung der Geradenbilder findet man die weiteren, bei der Konstruktion nicht verwendeten Grundpunkte der J_n . Demnach ist J_n eindeutig bestimmt, wenn man vorgibt: $O, A_1 \dots A_{2n-2}, O', A'_1$ und zwei entsprechende Punktepaare oder $O, A_1 \dots A_{2n-2}, O', A'_1, A'_2, A'_3$ oder $O, A_1 \dots A_{2n-2}$ und vier entsprechende Punktepaare; dann sind ω, Ω und die fehlenden Grundpunkte projektiv konstruierbar. — Man kann die oben entwickelte Konstruktion der J_n dazu benutzen, um die Besonderheiten zu verfolgen, die durch Zusammenrücken der Grundpunkte entstehen. Sind z. B. in π die i Punkte $A_{2n-i-1}, A_{2n-i}, \dots, A_{2n-2}$ in verschiedenen Richtungen zu O benachbart, so liegen in π' die Punkte $A'_1, A'_2, \dots, A'_{2n-i-2}$ auf einer Kurve $n - i - 1$ -ter Ordnung, die in O' die Vielfachheit $n - i - 2$ besitzt, und umgekehrt.

Harald Geppert (Berlin).

Godeaux, Lucien: Sur la structure des points unis des homographies cycliques du plan. Acad. roy. Belg., Cl. Sci., Mém. 19, 1—43 (1941).

Nel piano sia data un'omografia ciclica (non omologica), T , di periodo p (con p numero primo): essa dà luogo ad una involuzione I_p , di gruppi di p punti, che possiede tre punti uniti, non allineati, A, A', A'' . Si consideri uno di questi: A . Una curva, K , per A , ha come omologa nella T una curva che passa ancora per A , ma che tocca ivi la K solo se questa è tangente ad una delle rette AA' o AA'' . Cioè: i punti dell'intorno del primo ordine di A , non sono uniti nella T , e quindi A costituisce per la I_p quello che — con nomenclatura dovuta allo stesso Godeaux — si suole chiamare un punto unito non perfetto. Infinitamente vicini ad A , nella direzione di AA' e di AA'' , si hanno così due soli punti uniti, che, a loro volta, possono essere, uno od entrambi, perfetti o non perfetti. Certo è che — passando da quello del primo ordine, agli intorni successivi — finiremo col trovare dei punti uniti perfetti, infinitamente vicini ad A . Precisiamo la cosa. Si indichi con $|C|$ un sistema lineare (completo), privo di punti base, di dimensione abbastanza grande, e tale che ciascuna delle sue curve C venga trasformata in sè dalla T . Se C' è la generica curva di $|C|$ passante per A , la C' ha in A un punto di una certa molteplicità, ma le sue tangenti in A coincidono tutte con le rette AA' e AA'' . Anzi, nel caso più generale, se consideriamo un ramo della C' che esca da A e sia tangente ad AA' , sopra di esso il sistema $|C'|$ avrà una serie di punti base infinitamente vicini e successivi ad A : allora tutti questi punti sono uniti nella I_p e l'ultimo, A_{11} , è perfetto, cioè ogni punto del suo intorno, contato p volte, forma un gruppo della I_p . Così, in corrispondenza ai rimanenti rami della C' che passano per A e toccano la AA' , ma non contengono più A_{11} , si ha un certo numero, $\varrho - 1$, di altri punti uniti perfetti analoghi ad A_{11} . E similmente, partendo dalla considerazione dei rami della C' tangenti in A alla AA'' , si trovano σ nuovi punti uniti perfetti, situati nei diversi intorni di A . L'A., attraverso una accurata discussione e l'esame di varie circostanze, determina i numeri ϱ e σ , e le mol-

teplicità della C' nei predetti punti uniti perfetti. — La struttura del punto unito A per la I_p , si rispecchia nel tipo di singolarità che, nel punto di diramazione omologo di A , presenta la superficie (normale) che dà l'immagine della I_p e che si ottiene riferendo proiettivamente le curve di $|C|$ agli iperpiani di uno spazio di dimensione uguale a quella di $|C|$ medesimo. Così l' A . porta un nuovo contributo ad un problema che egli ha posto da tempo e trattato più volte, sia nel suo aspetto generale sia in taluni casi particolari notevoli: il problema di determinare la singolarità che offre, nei suoi punti di diramazione, la superficie immagine di una involuzione appartenente ad una superficie algebrica e dotata di un numero finito di punti uniti. *L. Campedelli.*

Godeaux, Lucien: Sur les points unis symétriques des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique. Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat. 1, 283—291 (1940).

Es sei I_p eine zyklische Involution einer ungeraden Primzahlordnung $p = 2q + 1$ auf einer algebraischen Fläche F ; I_p besitze nur eine endliche Anzahl von Doppelpunkten, die in einfache Punkte von F fallen. Eine geeignete Konstruktion gestattet vorauszusetzen, daß I_p auf F von einer zyklischen Homographie T des Raumes erzeugt wird; die Homographie T besitzt p Fundamentalräume $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p)}$, so daß alle Doppelpunkte von I_p auf $S^{(p)}$ liegen; die Hyperebenen durch alle Fundamentalräume, $S^{(i)}$ ausgeschlossen, schneiden auf F die Kurven eines mit I_p zusammengesetzten Systems $C^{(i)}$ aus. Als Bild der Involution I_p kann die Fläche Φ gewählt werden, die durch Projektion von F vom Verbindungsraume der $S^{(1)}, S^{(2)}, \dots, S^{(p-1)}$ aus auf $S^{(p)}$ erhalten wird; den Kurven $C^{(i)}$ von F entsprechen auf Φ gewisse Kurven I_i . Alles das folgt aus früheren Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. 13, 413). Hier betrachtet er einen symmetrischen Doppelpunkt A von I_p ; A ist dann für Φ ein biplanarer Doppelpunkt, dem eine Reihe anderer $q - 1$ biplanarer Doppelpunkte unendlich nahe liegt; vom Standpunkt der birationalen Transformationen aus ist der Punkt A einer Gruppe von $2q$ rationalen Kurven $\gamma_1\gamma_2 \dots \gamma_q\delta_q \dots \delta_1$ äquivalent, deren jede nur die vorangehende und die folgende schneidet. Das Ziel des Verf. ist, die funktionellen Beziehungen zu finden, die die Kurven I_k ($k \leq q$) mit den Kurven I_p, γ_i, δ_i verbinden. Anwendung auf den Fall einer Involution I_7 mit $p_a = P_4 = 1$ auf einer Fläche F mit $p_a = P_4 = 1$. *E. G. Togliatti (Genova).*

Godeaux, Lucien: Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre p^2 appartenant à une surface algébrique. 1. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 26, 28—43 (1940).

Godeaux, Lucien: Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre p^2 appartenant à une surface algébrique. 2. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 26, 100—110 (1940).

Godeaux, Lucien: Sur les points unis des involutions cycliques d'ordre p^2 appartenant à une surface algébrique. 3. Bull. Acad. Roy. Belg., V. s. 26, 115—128 (1940).

Indichiamo con F una superficie algebrica che sia cambiata in se stessa da una trasformazione birazionale periodica, T , di periodo q . La T determina sulla F quella che suole chiamarsi una involuzione, I_q , d'ordine q , e che è costituita dagli ∞^2 gruppi formati dai q punti che si ottengono associando ad ogni punto della F i suoi corrispondenti in T, T^2, \dots, T^{q-1} . — Da un punto A (semplice per la F), unito nella T , cioè coincidente con il suo omologo nella T (e quindi anche nelle T^2, \dots, T^{q-1}), nasce un particolare gruppo della I_q , che è composto da A contato q volte. Perciò si dice che A è un punto unito anche per la I_q . Noi supporremo, con l' A ., che nella I_q codesti punti siano in numero finito, e li distingueremo in due tipi diversi. Precisamente, secondo la nomenclatura introdotta dallo stesso Godeaux, diremo che A è un punto unito perfetto quando, insieme con A , sono uniti nella T tutti i punti dell'intorno del primo ordine di A . Cioè, quando due curve qualunque della F passanti per A e corrispondenti nella T , hanno in A la stessa tangente. Nel caso contrario A sarà un punto unito non perfetto, e, nel fascio delle tangenti alla F in A , avremo due sole direzioni unite nella T . — Sulla F è possibile costruire un sistema lineare semplice, $|C|$, trasformato in sè dalla T , cosicchè se si prende come modello proiettivo della F quella superficie su cui $|C|$ è segato dagli iperpiani, la T diviene una omografia

(di periodo q) dello spazio ambiente. Notevole è il concetto di superficie immagine della I_q , come si chiama una superficie Φ i cui punti siano in corrispondenza biunivoca con i gruppi della I_q . A un punto unito della I_q corrisponde allora un punto di diramazione della Φ , e, per l'ipotesi fatta sulla I_q , codesti punti della Φ sono isolati e in numero finito. Anche della Φ può assumersi un opportuno modello proiettivo normale, facendo ricorso ad un certo sistema, contenuto in $|C|$ e composto con la I_q . (Si veda, anche per la bibliografia, L. Godeaux, *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique*. Paris: Hermann 1935; questo Zbl. 13, 413.) — Ebbene: se A è un punto unito della I_q ed A' il suo corrispondente su Φ , nasce il problema di determinare la natura della singolarità che la Φ (nel suo modello proiettivo normale predetto) presenta in A' . La questione, salvo che per i punti uniti perfetti, presenta notevoli difficoltà: ad essa il G. ha dedicato una lunga serie di lavori, studiando numerosi casi particolari, ed approfondendo principalmente l'ipotesi in cui q sia un numero primo. Ora egli torna sull'argomento per occuparsi di un nuovo tipo di punto unito non perfetto, A . Si tratta del caso in cui q è il quadrato di un numero primo dispari, $q = p^2$, e la T subordina nell'intorno del primo ordine di A , una involuzione di ordine p , cosicchè la trasformata nella T^p di una curva K di F passante per A , ha ivi la medesima tangente della K . — Il Nostro già ha studiato queste circostanze per $p = 2$ (*Annales de l'Ecole normale supérieure*, 1914 e 1919), e, recentemente, il Rozet ha preso in esame il valore $p = 3$ (questo Zbl. 18, 328; 19, 230). — Passando all'ipotesi che p sia un qualunque numero primo dispari, l'A., dopo le opportune premesse di carattere generale (Nota I), considera da prima (Nota II) il caso in cui il cono tangente alla superficie Φ nel punto A' è spezzato in due parti (irriducibili), γ_1 e γ_2 . Ne deduce che ciò porta come conseguenza la molteplicità p della Φ in A' , e che γ_1 è costituito da un piano e γ_2 da un cono razionale d'ordine $p - 1$, che taglia γ_1 lungo una retta. Mentre, viceversa, se Φ ha in A' un punto p -plo, necessariamente il cono tangente in A' è spezzato in due parti. — E se le componenti di quel cono sono più di due? L'A. risponde (Nota III) che queste componenti, opportunamente raggruppate, danno luogo ancora a due coni razionali, γ_1 e γ_2 , aventi una retta in comune, e prende in ulteriore esame l'ipotesi in cui solo γ_2 sia spezzato, supponendo che invece γ_2 sia irriducibile, d'ordine non maggiore di $(p - 1)/2$. Allora egli giunge a provare che la Φ possiede un punto doppio biplanare infinitamente vicino ad A' . — La ricerca termina con la trattazione completa del caso in cui γ_1 è un cono quadrico, e γ_2 si scinde in due parti (irriducibili), γ_2 e γ_2 . Posto $p = 2m + 1$, si ha che γ_3 è un cono razionale, d'ordine $m - 1$, che incontra γ_1 lungo una retta, e che γ_3 è un piano che taglia γ_3 pure secondo una retta. Sulla retta comune a γ_1 e a γ_3 , la Φ possiede, infinitamente vicino ad A' , un punto doppio biplanare, A'' , al quale, se m è pari, fanno seguito altri $(m - 2)/2$ punti doppi biplanari successivi; e, se invece m è dispari, ad A'' sono infinitamente vicini e successivi $(m - 3)/2$ punti doppi biplanari ed un punto doppio conico.

L. Campedelli (Firenze).

Lilley, S.: On the isolated united points of a cyclic involution of an algebraic surface. *Proc. London Math. Soc.*, II. s. 46, 312—360 (1940).

T sei eine automorphe, zyklische, birationale Abbildung einer algebraischen Fläche F mit der Periode n . Untersucht wird ein isolierter Deckpunkt O [also $T(O) = O$] der durch T auf F erzeugten zyklischen Involution J_n . In der Umgebung 1. Ordnung von O induziert T eine zyklische automorphe Transformation der Periode δ ; O heißt ein unvollkommener, δ -perfekter oder vollkommener Deckpunkt der J_n , je nachdem δ gleich n , ein echter Teiler von n oder 1 ist. Ist O nicht vollkommen, so liegen in seiner Umgebung 1. Ordnung zwei isolierte Deckpunkte der J_n , die man durch Auflösung der Umgebung sichtbar machen und ebenso klassifizieren kann; ist einer derselben, etwa O_1 , nicht vollkommen, so kann man dessen Umgebung 1. O. entsprechend untersuchen usw.; so erhält man eine Folge von Deckpunkten (1) O, O_1, \dots, O_m derart, daß O_i der Umgebung 1. O. von O_{i-1} angehört. Die Nachbarschaftsbeziehungen dieser

Punkte sehen so aus: O_1, O_2, \dots, O_{s_1} sind frei, jeder nur seinem unmittelbaren Vorgänger benachbart, $O_{s_1+1}, \dots, O_{s_1+s_2}$ sind sowohl zu O_{s_1-1} als auch zu ihren unmittelbaren Vorgängern benachbart, $O_{s_1+s_2+1}, \dots, O_{s_1+s_2+s_3}$ sind sowohl zu $O_{s_1+s_2-1}$ als auch zu ihren unmittelbaren Vorgängern benachbart usw.; $s_1 + \dots + s_\mu = m$. Alle Punkte von O_{s_1+1} an sind demnach Satelliten von O_{s_1} . O_m ist also durch Vorgabe der s_1, \dots, s_μ vollkommen bestimmt, sobald man weiß, welcher der beiden von O ausgehenden Folgen er angehört. Jedem O_m , d. h. also jedem Deckpunkt in der Umgebung von O , läßt sich ein ganzzahliges Koordinatenpaar (X, Y) zuordnen durch den euklidischen Algorithmus: $Y = v'_{-1} = s_1 X + v_1$, $X = v_0 = s_2 v_1 + v_2$, $v_1 = s_3 v_2 + v_3, \dots, v_{\mu-3} = s_{\mu-2} v_{\mu-2} + 1$, $v_{\mu-2} = s_\mu \cdot 1 + 1$; $0 \leq v_i < v_{i-1}$. Verabredungsgemäß gibt man den Punkten der zweiten Folge die Koordinaten (Y, X) . In der Umgebung des Punktes O ($u = v = 0$) läßt sich nun T in der Form darstellen: (2) $u_1 = \varepsilon^\beta u + \dots$, $v_1 = \varepsilon^\alpha v + \dots$, wo ε eine primitive n -te Einheitswurzel, $0 \leq \alpha, \beta < n$ ist und Glieder 2. Ordnung weggelassen wurden; man kann erreichen, daß α, β, n teilerfremd sind; δ ist die kleinste ganze Lösung der Kongruenz $\delta(\alpha - \beta) \equiv 0 \pmod{n}$. Damit ist Verf. in der Lage, ein Rechenverfahren zur Bestimmung der den Punkten O_i zukommenden Vollkommenheitsindizes δ_i zu entwickeln; (X, Y) ist genau dann ein δ -perfekter Deckpunkt der J_n , wenn δ die kleinste ganze Lösung von $\delta(\alpha X - \beta Y) \equiv 0 \pmod{n}$ ist. Ein Matrizenrechenchema erlaubt dann, bei bekannten n, α, β die Umgebungsstruktur von O zu analysieren. — Der zweite Teil der Arbeit ist den mittels J_n (und nur mittels dieser Involution) zusammengesetzten linearen Kurvensystemen $|C|$, die in O keinen Basispunkt haben, und der Untersuchung der Singularität O für ihre durch O gehenden Teilsysteme gewidmet. Ist Dimension, Grad und Geschlecht von $|C|$ genügend hoch, so ist die Vielfachheit von O für jedes Teilsystem von $|C|$ ein ganzes Vielfaches von n/δ , und die Summe der Vielfachheiten von O für diejenigen seiner Zweige, die keinen zu O benachbarten Deckpunkt enthalten, ist ein ganzes Vielfaches von δ . Zu genaueren Aussagen gelangt man, wenn man voraussetzt, daß $|C|$ keine O enthaltenden Fundamentalkurven besitzt und nicht alle durch O laufenden C durch einen andern Punkt von F laufen. Betrachtet werden Teilsysteme von $|C|$ mit dem Basispunkt O , die keine durch O gehende feste Komponente aufweisen; dann ergeben sich für deren Multiplizitäten in den Punkten der Folge (1) notwendige Bedingungen, die sich durch Matrizen, in die die Koordinaten (X_i, Y_i) eingehen, einfach ausdrücken lassen. — Der dritte Teil bringt die vollständige Bestimmung der O entsprechenden Singularität S auf einem Modell Φ , das aus F durch die Abbildung mittels $|C|$ entsteht. Sie wird mittels eines einfachen Algorithmus, der hier nicht beschrieben werden kann, aus α, β, n gewonnen und erledigt eine von Godeaux vielfach behandelte Fragestellung. *Harald Geppert* (Berlin).

Enriques, Federico: Sopra le involuzioni irregolari appartenenti ad una superficie algebrica. Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat. 1, 293—296 (1940).

F sei eine irreguläre algebraische Fläche mit dem arithmetischen Geschlecht p_a und dem geometrischen Geschlecht p_g . Verf. fragt, ob es auf F eine ∞^1 -Gesamtheit von Involutionen der Irregularität $d = p_g - p_a$ geben kann. Durch geometrische Überlegungen gelingt es Verf. zu beweisen, daß notwendig F dann ein irrationales Büschel des Geschlechts d von Kurven tragen muß. Die auf F existierenden Involutionen lassen sich dann eineindeutig auf eine Regelfläche des Geschlechts d beziehen.

L. Campedelli (Firenze).

Zariski, Oscar: Pencils on an algebraic variety and a new proof of a theorem of Bertini. Trans. Amer. Math. Soc. 50, 48—70 (1941).

Wenn in einer irreduziblen Korrespondenz jedem allgemeinen Punkt ξ einer r -dimensionalen algebraischen Mannigfaltigkeit V ein einziger Punkt η einer singularitätenfreien Bildkurve entspricht, so entspricht umgekehrt jedem Punkt der Bildkurve eine V_{r-1} auf V , und diese V_{r-1} bilden das, was man ein Büschel von V_{r-1} auf V nennt. Da r rational von ξ abhängt, ist der Funktionenkörper $K(\eta) = P$ ein Unter-

körper (vom Transzendenzgrad 1) des Funktionenkörpers $K(\xi) = \Sigma$. Jeder solche Unterkörper P definiert ein Büschel, und den Stellen \mathfrak{p} von P entsprechen Exemplare $W_{\mathfrak{p}}$ des Büschels, deren irreduzible Bestandteile mit bestimmten Multiplizitäten zu versehen sind. Alle $W_{\mathfrak{p}}$ haben denselben Grad. Diese Tatsachen können nun auch in der Sprache der Bewertungstheorie formuliert und auf den Fall eines nicht algebraisch abgeschlossenen Grundkörpers ausgedehnt werden. Ist ein Büschel $\{W\}$ aus einem anderen Büschel $\{W'\}$ zusammengesetzt, so ist der zugehörige Körper P ein Unterkörper von P' , und umgekehrt. Daraus folgt, daß $\{W\}$ dann und nur dann nicht zusammengesetzt ist, wenn P maximal algebraisch in Σ ist. — Auf Grund dieser Begriffsbildungen wird nun gezeigt, daß ein bekannter Satz von Bertini nicht nur für rationale, sondern auch für irrationale Büschel (Geschlecht der Bildkurve > 0) gilt. Er heißt: Wenn ein Büschel $\{W\}$ ohne festen Bestandteile nicht zusammengesetzt ist, so sind alle Exemplare des Büschels bis auf endlich viele irreduzibel über K . Der Beweis beruht nicht, wie der übliche geometrische Beweis, auf der Doppelpunktsfreiheit eines allgemeinen Büschelexemplares, sondern auf einem einfachen Hilfssatz über absolut irreduzible Mannigfaltigkeiten (Lemma 4). Anschließend wird der Bertinische Satz für mehrdimensionale lineare Scharen neu bewiesen, und zwar auf Grund eines Hilfssatzes über maximal algebraische Unterkörper eines Funktionenkörpers (Lemma 5).
van der Waerden (Leipzig).

Zariski, Oscar: Local uniformization on algebraic varieties. Ann. of Math., II. s. 41, 852—896 (1940).

Beim Problem der Ortsuniformisierung der algebraischen Mannigfaltigkeiten handelt es sich um die Überdeckung einer r -dimensionalen Mannigfaltigkeit V_0 im projektiven Raum mit endlich vielen Keilen, wobei unter einem Keil ein durch holomorphe Funktionen vermitteltes Bild einer offenen Menge in einem r -dimensionalen Parameterraum verstanden wird. Wesentlich für die hier gegebene Lösung dieses Problems ist der alte Dedekind-Webersche Begriff eines Ortes (oder „Punktes der Riemannschen Fläche“) eines algebraischen Funktionenkörpers. Darunter wird eine solche Zuordnung verstanden, die jeder Funktion des Körpers eine Konstante oder das Symbol ∞ zuordnet, so daß der Summe die Summe usw. entspricht. Zu jedem Ort gehört eine nulldimensionale Bewertung; deren Bewertungsring besteht nämlich aus den Funktionen, denen nicht ∞ zugeordnet ist. Umgekehrt definiert jede nulldimensionale Bewertung einen Ort. Zu jedem Ort des Funktionenkörpers gehört weiter in bekannter Weise ein Punkt der Mannigfaltigkeit V_0 , der Mittelpunkt des Ortes (oder der Bewertung). Die lokale Uniformisierung wird nun auf folgenden algebraischen Satz zurückgeführt: Ist V_0 eine Mannigfaltigkeit, Σ der zugehörige Funktionenkörper, B eine nulldimensionale Bewertung von Σ mit Mittelpunkt P_0 auf V_0 , so gibt es eine andere zum gleichen Funktionenkörper gehörige Mannigfaltigkeit V , auf der der Mittelpunkt von B ein einfacher Punkt P ist, derart, daß alle in P endlichen Funktionen des Körpers auch in P_0 endlich bleiben. Aus diesem Satz folgt die Möglichkeit der Überdeckung von V_0 mit endlich vielen Keilen in sehr einfacher Weise auf Grund der Bemerkung, daß die „Riemannsche Fläche“ von V_0 , die Gesamtheit aller Stellen, ein bikompakter (übrigens nicht separabler) topologischer Raum ist. — Der Beweis des algebraischen Satzes wird so geführt, daß Bewertungen beliebigen Ranges aus solchen vom Rang 1 (d. h. mit archimedischer Wertegruppe) zusammengesetzt werden. Dabei ergibt sich die Notwendigkeit, den Satz auch auf nicht algebraisch abgeschlossene Konstantenkörper und nicht nulldimensionale Bewertungen auszudehnen. Dagegen kann man sich im wesentlichen auf Bewertungen vom Rang 1 beschränken und kann weiter V_0 als Hyperfläche in S_{r+1} annehmen. Für diesen Fall wird sogar noch mehr bewiesen: die birationale Transformation, die V_0 in V überführt, ist nämlich eine Cremonatransformation des umgebenden Raumes S_{r+1} . Als Hilfsmittel zur Konstruktion dieser Cremonatransformation dient ein Algorithmus von Perron zur gleichzeitigen Approximation von mehreren reellen Zahlen. *van der Waerden* (Leipzig).

Vektor- und Tensorrechnung, Kinematik:

● **Dörrie, Heinrich:** Vektoren. München u. Berlin: R. Oldenbourg 1941. VIII, 300 S. u. 69 Abb. geb. RM. 13.50.

Diese Darstellung der Vektorrechnung gliedert sich in einen theoretischen Teil und drei große Anwendungskapitel aus der Geometrie, der Mechanik und der Elektrizitätslehre. Die Theorie führt von den Elementen über die Transformation von Vektoren und Koordinaten bis zu den Operatoren grad, div, rot und dem Gaußschen und Stokesschen Satz; die allgemeine Darstellung wie die Darstellung im ijk -System werden gleichermaßen sorgfältig behandelt. — Das Hauptgewicht des Buches liegt auf den Anwendungen. Der geometrische Teil gibt nicht nur planimetrische, stereometrische und trigonometrische Probleme sowie Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene und des Raumes, sondern enthält einen kurzen Anfangslehrgang der klassischen Differentialgeometrie bis zum Krümmungsbegriff und den wichtigsten Flächenkurven. Aus dem Gebiet der Mechanik werden u. a. die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, die Dynamik des Massenpunktes, die Keplerschen Gesetze und die Relativbewegung auf der Erdoberfläche, die Grundgleichungen der Dynamik und die Eulerschen Gleichungen behandelt; die Eleganz der Vektorrechnung kommt bei diesen Themen besonders gut zum Ausdruck. Von den Anwendungen auf Elektrizität sind der Wechselstromkreis mit Spule und Kondensator, elektrische Schwingungen, die Maxwell'schen Gleichungen und elektromagnetische Wellen ausgewählt. — Die flüssige Darstellung des Ganzen und die Fülle der Beispiele und Querverbindungen aus den verschiedenen mathematischen und naturwissenschaftlichen Disziplinen macht das Buch für Mathematiker und Physiker wie für Ingenieure aller Gattungen gleich geeignet. Seiner im Vorwort ausgesprochenen Zielsetzung, die Verbreitung der Vektorrechnung zu fördern, wird es in hervorragender Weise gerecht. *U. Graf* (Danzig).

Serini, Rocco: Risultante e momento risultante delle azioni capillari su un pezzo di superficie. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 207—210 (1941).

Ist \mathbf{n} der Normaleneinheitsvektor einer in eine Familie eingebettet gedachten Fläche F mit den Hauptkrümmungen R_1^{-1}, R_2^{-1} , so gilt (1) $\operatorname{div} \mathbf{n} = -(R_1^{-1} + R_2^{-1})$. Liegt auf F eine geschlossene, nichtverschlungene Kurve C , und ist das von ihr berandete Flächenstück S die freie Oberfläche einer Flüssigkeit, \mathbf{n}_s die Seitennormale von C auf F , so ist die Resultante bzw. das resultierende Moment bez. O der auf C wirkenden Kapillarkräfte durch

$$\oint_C K \mathbf{n}_s dz \quad \text{bzw.} \quad \oint_C (\vec{OP} \times K \mathbf{n}_s) ds, \quad K = \text{Kapillarkonstante}$$

gegeben. Die Formel (1) bietet im Verein mit dem Stokesschen Satz die Möglichkeit, diese Ausdrücke durch einfache Umrechnung auf die Formen

$$\iint_S K (R_1^{-1} + R_2^{-1}) \mathbf{n} dS \quad \text{bzw.} \quad \iint_S (\vec{OP} \times K (R_1^{-1} + R_2^{-1}) \mathbf{n}) dS.$$

zu bringen, die von Laplace angegeben wurden.

Harald Geppert (Berlin).

Mira Fernandes, A. de: Un vettore ausiliare in analisi tensoriale. Portugaliae Math. 2, 139—144 (1941).

Lassen sich die Koordinaten x^i des untersuchten Raumes mittels eines Vektorfeldes u_i ausdrücken, $x^i = x^i(u_1, \dots, u_n)$, so ist

$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial u_i} = \frac{\partial x^j}{\partial u_i} \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Dabei erhöht bekanntlich der Operator links in (1) die Zahl der kontravarianten Indizes um einen. Die Formel (1) wird auf verschiedene bekannte Formeln angewandt.

Hlavatý (Prag).

Cisotti, Umberto: Invarianti quadratici dei tensori. Atti Accad. Italia, VII. s. 2, 511—516 (1941).

Sind $T_{i_1 \dots i_m}$ die Komponenten eines m -stufigen Tensors T und

$$\delta_{i_1 k_1 \dots i_m k_m} = \Delta_{i_1 \dots i_m}^{(r)}{}_{k_1 \dots k_m} \quad (r = 1, \dots, N)$$

die Komponenten irgendeiner der N linear unabhängigen m -ten Potenzen des Ricci'schen Fundamentaltensors, so sind die Skalaren:

$$J_r = \sum T_{i_1 \dots i_m} T_{k_1 \dots k_m} \Delta_{i_1 \dots k_m}^{(r)}$$

genau alle linear-unabhängigen quadratischen Invarianten von T . Verf. rechnet sie für $m = 1, 2, 3$ explizit aus: für $m = 1$ ist J das Quadrat des Betrages des Vektors T , für $m = 2$ ist T in einen symmetrischen und einen schiefsymmetrischen Tensor zu zerlegen, und die Quadrate ihrer Beträge sowie das Quadrat der linearen Invariante von T (vgl. dies. Zbl. 24, 283) bilden alle Invarianten; für $m = 3$ ist $N = 15$, handelt es sich jedoch um einen symmetrischen Tensor, so sind die beiden einzigen Invarianten $\sum_{i,h,k} T_{i h k}^2$ und $\sum_i \left(\sum_h T_{i h h} \right)^2$.
Harald Geppert (Berlin).

Cisotti, Umberto: Sopra il tensore isotropo di minimo scarto da un tensore doppio assegnato. Atti Mem. Accad. Sci. Padova, N. s. 56, 7—10 (1941).

Ist T_{ik} , $i, k = 1, 2, 3$, ein gegebener zweistufiger Tensor, δ_{ik} das Kroneckersche Symbol, so soll der Skalar p derart bestimmt werden, daß der Abweichungstensor $S_{ik} = T_{ik} - p \delta_{ik}$ möglichst kleinen Betrag hat: $\sum_{i,k} S_{ik}^2 = \min$. Es ergibt sich $p = \frac{1}{3} \sum_i T_{ii}$. Ist z. B. T_{ik} ein elastischer Deformationstensor, so ist $3p$ gleich dem Koeffizienten der kubischen Dilatation zu setzen.
Harald Geppert (Berlin).

Doyle, T. C.: Tensor decomposition with applications to the contact and complex groups. Ann. of Math., II. s. 42, 698—722 (1941).

Eisenhart und Knebelman haben gezeigt, daß sich ein Vektor mit $2q$ Bestimmungszahlen im $2q$ -dimensionalen Raum der x^i und p_i unter der Gruppe der Berührungstransformationen in zwei Komponenten mit je q Bestimmungszahlen zerlegen läßt. Von diesen Komponenten bildet aber nur der eine ein geometrisches Objekt für sich. Es gelingt Verf. jetzt eine Zerlegung in zwei Komponenten abzuleiten, die beide geometrische Objekte sind. Er erreicht dies mittels zweier Familien von komplementären Unterräumen im x, p -Raum und projizierenden Tensoren in diesen Unterräumen. Der Ansatz wird zunächst sehr allgemein gehalten, so daß sich die gewöhnlichen Berührungstransformationen, die Schoutenschen doppelthomogenen Berührungstransformationen und die Komplexgruppe sämtlich als spezielle Fälle behandeln lassen.
Schouten (Delft).

Sarmiento de Beires, R.: Sur la formule d'Euler-Savary. Portugaliae Math. 2, 81—84 (1941).

Wiederabdruck der unter dem gleichen Titel erschienenen Arbeit des Verf. in Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 637—640 (1933). Harald Geppert (Berlin).

Fadle, Johann: Über Kurven konstanten Bahndruckes. Z. angew. Math. Mech. 21, 118—123 (1941).

Gesucht werden die Kurven in vertikaler Ebene mit folgender Eigenschaft: Gleitet längs einer Kurve ein Massenpunkt reibungslos, dann soll er mit konstanter Kraft auf die Kurve drücken. Aus der Bewegungsgleichung folgt für die Kurve eine Differentialgleichung mit den Veränderlichen y , y' und y'' , so daß y als unabhängige Veränderliche eingeführt wird. Die 1. Integration wird dadurch erreicht, daß $\text{Ar} \sin x'$ als neue abhängige Veränderliche eingeführt wird. Dann kann man bereits Ordinate und Krümmungsradius als Funktionen des Steigungswinkels bestimmen. Bei der 2. Integration tritt, wenn die Druckkraft größer als das Gewicht ist, die Funktion \arccos , und, wenn die Druckkraft kleiner als das Gewicht ist, die Funktion $\text{Ar} \cos$ auf. Wird die Druckkraft $= 0$, erhält man Wurfparabeln.
Ludwig (Hannover).

Bloch, Z. Š.: Zur Theorie konchoidaler Mechanismen. Bull. Acad. Sci. URSS, Cl. Sci. techn. Nr 4, 101—106 (1941) [Russisch].

Für die als Konchoidenlenker bekannte angenäherte Geradföhrung wird eine Parameterdarstellung der Koppelkurve eines Punktes der Schleifstange aufgestellt und dazu verwendet, auf Grund der Ergebnisse von P. L. Tschebyscheff (siehe etwa

Oeuvres I, 273 ff.; Petersburg 1899) über Funktionen geringster Abweichung von der Null einige diese Geradföhrung betreffende Fragen zu behandeln. So werden etwa die Länge der Strecke, innerhalb welcher die Koppelkurve mit einer bestimmten Genauigkeit die Gerade ersetzt, sowie die größte Abweichung der Koppelkurve von der Geraden innerhalb dieses Abschnittes bestimmt; oder es werden die Abmessungen des Lenkers so berechnet, daß die Abweichung der Koppelkurve von einer Geraden innerhalb eines bestimmten Stückes ein vorgegebenes Maß nicht übersteigt.

W. Schmid (Dresden).

Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

Sbrana, Francesco: Una generalizzazione della normale affine ad una curva piana. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 210—212 (1941).

O sei ein gewöhnlicher Punkt auf der ebenen Kurve C , t seine Tangente, Q ein beliebiger Punkt auf t . Eine beliebige Sehne durch Q schneide C in den (in der Grenze gegen O strebenden) Punkten P_1, P_2 . Der Punkt N teile die Strecke P_1P_2 im konstanten Verhältnis k . Ist dann $k \neq 1$ und $m = (1+k)/(1-k)$, so beschreibt N bei Drehung der Sehne um Q eine Kurve Γ , die C in O berührt, und die Berührungsinvariante von Γ und C ist m^2 . Ist hingegen $k = 1$, d. h. N Mittelpunkt von P_1P_2 , so strebt die Gerade ON einer Grenzlage t' zu, die eine Verallgemeinerung der Affinormalen darstellt; t' ist die Polare des Spiegelbildes von Q an O bezüglich der Schmiegeparabel von C in O .

Harald Geppert (Berlin).

Sbrana, Francesco: Sopra certe proprietà delle curve. Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 359—363 (1941).

Die Überlegungen der vorstehend besprochenen Arbeit überträgt Verf. auf den Raum. O sei ein gewöhnlicher Punkt der Raumkurve C mit der Tangente t und Hauptnormalen h . Durch einen Punkt Q von t werde eine Ebene α gelegt, deren Normale, senkrecht auf die Normalebene von C in O projiziert, mit h den Winkel θ bildet. α schneide C in P_1, P_2 und werde unter Erhaltung von θ so lange um Q gedreht, bis sie t enthält, wobei P_1, P_2 nach O rücken. Der Ort des Punktes M , der die Strecke P_1P_2 im festen Verhältnis k teilt, ist dann für $k \neq 1$ eine Kurve C' , die in O mit C Tangente, Hauptnormale und Windung gemein hat, während das Verhältnis der Krümmungen $((k+1)/(k-1))^2$ ist. Für $k = 1$ hat C' in O die Tangente t' , die man so findet: es sei b_0 die Schnittgerade der Grenzlage α_0 von α mit der Normalebene von C , \bar{C} die Parallelprojektion von C in Richtung b_0 auf die Schmiegeebene von C , Π_0 die Schmiegeparabel von \bar{C} in O ; dann ist t' die Polare des Spiegelpunktes von Q an O bezüglich Π_0 .

Harald Geppert (Berlin).

Löbell, Frank: Zur Differentialgeometrie der Regelscharen. Jber. Dtsch. Math.-Verein. 51, Abt. 2, 29—41 (1941).

Ziel der Arbeit ist es, nachzuweisen, daß die kinematische Methode auf bequemster Weise die drei kennzeichnenden Differentialinvarianten einer Regelfläche liefert. Letztere werde durch eine Gerade $E(t)$ geliefert, die an einer durch den Parameter t beschriebenen Bewegung des Raumes teilnimmt; dann läßt sich der Geschwindigkeitszustand dieses Raumes in jedem Augenblick in eine Schraubung um die Achse E und eine Schraubung um eine E senkrecht schneidende Achse F zerlegen; der Schnittpunkt k von E, F ist der Kehlpunkt, dieser bestimmt mit E, F und der dazu senkrechten Achse H einen starren Körper, den sog. Begleitkörper der Regelschar $E(t)$, dessen Bewegung als die die Regelschar erzeugende Raumbewegung gewählt wird. $e, f, h = e \times f$ seien die Einheitsvektoren der Achsen E, F, H ; zerlegt man die momentane Drehgeschwindigkeit u des Begleitkörpers in $u = u_1e + u_2f$ und die momentane Geschwindigkeit v von k in $v = v_1e + v_2f$, so heißen u_1, v_1 Längsdrehung und -schiebung, u_2, v_2 Querdrehung und -schiebung, und die Verhältnisse $d = v_2/v_1, e = u_1/v_1, f = u_2/v_2$ werden bzw. als Schlupf, Schrotung und Schränkung (= reziproker Verteilungsparameter nach Chasles) bezeichnet. Durch Vorgabe von u_1, u_2, v_1, v_2 als Funktionen von t ist die

Regelschar bis auf ihre Lage bestimmt; die Größen d, e, f , die, als Funktionen eines geometrischen Parameters gegeben, die Regelschar nach Form und Größe festlegen, sind ihre drei kennzeichnenden Differentialinvarianten. Denkt man sich die Regelfläche durch $e(t)$ und den Momentvektor $m = \mathfrak{r} \times e$ gegeben, so findet sich

$$u_1 = \frac{(e, \dot{e}, \ddot{e})}{\dot{e}^2}, \quad u_2 = |\dot{e}|, \quad v_1 = (e, \dot{e}, m) + \frac{d}{dt} \left\{ \frac{(e, \dot{e}, \dot{m})}{\dot{e}^2} \right\}, \quad v_2 = \frac{\dot{e} \dot{m}}{|\dot{e}|}.$$

Schließlich entnimmt Verf. seinen Überlegungen die Kriterien für gekoppelte Regelscharen, d. h. solche, deren Begleitkörper bei ihrer Erzeugung in starrer gegenseitiger Verbindung bleiben, und insbesondere dafür, daß unter den mit einer Regelschar gekoppelten Regelflächen sich eine Torse befinde. *Harald Geppert* (Berlin).

Löbell, Frank: Die Bewegungen des begleitenden Dreikants. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. **51**, 148—150 (1941).

Frage: Wodurch unterscheidet sich die Bewegung des begleitenden Dreibeins längs einer Raumkurve von der allgemeinen Bewegung eines starren Körpers? Man kann jede Raumbewegung bekanntlich durch Abschroten einer beweglichen Regelfläche auf einer festen Regelfläche erzeugen. Betrachtet man nun zunächst die Bewegung des Begleitkörpers einer beliebigen Regelschar R (vgl. vorsteh. Referat), so ist sie dadurch gekennzeichnet, daß die zu ihr gehörige bewegliche Achsenfläche ein orthogonales Konoid ist; soll diese insbesondere die Bewegung des begleitenden Dreibeins einer Kurve sein, so muß unter den mit R gekoppelten Regelscharen eine Torse, nämlich die Tangentenfläche jener Kurve, vorkommen, wofür die Bedingungen der voranstehenden Arbeit zu entnehmen sind. Man erhält jene Bewegung so: Man lege ein orthogonales Konoid K durch Angabe des Drehwinkels $\omega(t)$ und der auf der Achse gemessenen Höhe $z(t)$ seiner Erzeugenden fest und bestimme $u_1(t)$, $v_1(t)$ so, daß $u_1:v_1 = \tan \omega:z$, im übrigen beliebig, setze $u_2 = \dot{\omega}$, $v_2 = \dot{z}$ und ermittle zu u_1 , u_2 , v_1 , v_2 als Längs- bzw. Querdrehung und -schiebung eine Regelfläche S ; die gesuchte Bewegung entsteht durch Abschroten des beweglichen K auf der festen S . *Harald Geppert*.

Bompiani, E.: Sistemi semplicemente infiniti di curve di una superficie aventi gli stessi piani osculatori. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **3**, 97—101 (1941).

Verf. untersucht im gewöhnlichen Raume den Zusammenhang zwischen einem System von ∞^1 Kurven auf einer Fläche Σ und den ∞^2 Schmiegeebenen dieser Kurven, welche eine Fläche σ umhüllen, wenn das System der Kurven durch eine Differentialgleichung $\frac{du}{dv} = \vartheta(u, v)$ oder die Gleichung von σ gegeben ist. Als Beispiele dienen $x_1 = u$, $x_2 = v$, $x_3 = uv$, $x_4 = 1$; $\frac{dv}{du} = \frac{u}{v}$ und $x_1 x_2 = x_3 x_4$, $a^2 x_1 x_2 = x_3 x_4$ ($a^2 \neq 0, 1$). [Vgl. H. Jonas, Ann. di Mat., IV. s. **18**, 23—50 (1939); dies. Zbl. **21**, 157]. *Volk*.

Schatz, Heinrich: Begleitende Zyklide bei Streifen in der Bewegungsgeometrie. Jber. Dtsch. Math.-Vereinig. **50**, Abt. 1, 7—18 (1940).

Bei einem Streifen, der kein Krümmungsstreifen ist, und der auch einer weiteren Allgemeinheitenbedingung [vgl. W. Blaschke, Differentialgeometrie III, 294—295 (1930)] genügt, läßt sich durch vier konsekutive Flächenelemente eine Dupinsche Zyklide legen. Dieser Satz der Laguerreschen Flächentheorie, den Verf. früher schon durch adäquatere Mittel nachgewiesen hatte [Über die Geometrie von Laguerre VIII und IX, Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. **5**, 54—84 (1926); Math. Z. **28**, 97—106 (1928)], wird im elementaren Rahmen der Bewegungsgeometrie des R_3 hergeleitet. Schon dieser euklidische Nachweis gestaltet sich einigermaßen mühsam. Die einzelnen möglichen Sonderfälle werden deshalb nicht durchdiskutiert. *K. Strubecker* (Wien).

Bompiani, Enrico: Le superficie emisotrope nello spazio euclideo a quattro dimensioni. Atti Accad. Italia, Mem. **12**, 1—23 (1940).

Analog wie in der Differentialgeometrie der Kurven in mehrdimensionalen Räumen spielen auch in der Theorie von Flächen höherer (euklidischer) mehrdimensionaler Räume die begleitenden linearen Räume dieser Flächen eine ihre Geometrie wesentlich

bestimmende Rolle. Daher wird es verständlich, wenn Verf. auch der Untersuchung isotroper und halbisotroper Mannigfaltigkeiten vorwiegend projektive Hilfsmittel zugrunde legt, obwohl es sich in diesem Falle um Mannigfaltigkeiten handelt, die doch auch in besonderer Weise metrisch (oder doch wenigstens konformmetrisch) ausgezeichnet erscheinen. — Untersuchungen zweidimensionaler Flächen im (komplexen) euklidischen Raum von vier Dimensionen S_4 kann man z. B. von vornherein nach dem Verhalten des von den ersten und zweiten Ableitungen des Ortsvektors einer solchen Fläche aufgespannten Schmiegraums $S(2)$ klassifizieren. Dann erhält man die folgenden Fälle: (Ia) $S(2) = S_4$ mit zwei Scharen konjugierter Flächenkurven; (Ib) $S(2) = S_4$ mit einer Schar von Asymptotenkurven; (IIa) $S(2) = S_3$ und dieser dreidimensionale Raum ist für alle Punkte der Fläche derselbe; (IIb) $S(2) = S_3$ und dieser dreidimensionale Raum ändert sich von Flächenpunkt zu Flächenpunkt; (III) $S(2) = S_2$. — Im Falle (Ia) genügen die projektiven Koordinaten der Fläche einer partiellen homogenen, nichtparabolischen Differentialgleichung zweiter Ordnung, im Falle (Ib) einer ebensolchen parabolischen Differentialgleichung. Im Falle (IIa) liegt die Fläche in diesem S_3 , im Falle (IIb) handelt es sich um Torsen, im Falle (III) um Ebenen. — Die halbisotropen Flächen in S_4 ordnen sich in diese Klassifikation folgendermaßen ein: die halbisotropen Ebenen (III) sind diejenigen, deren Schnittgeraden mit dem uneigentlichen Raum des S_4 Tangenten an die uneigentliche absolute Maßfläche des S_4 darstellen. Die halbisotropen Flächen (IIb) zerfallen in zwei weitere Flächenklassen, je nachdem die von den uneigentlichen Geraden ihrer Tangentialebenen eingehüllte uneigentliche Kurve auf der absoluten Maßfläche liegt oder nicht. Alle diese Flächen sind Torsen (vgl. Ref., dies. Zbl. 4, 129; 14, 179; 15, 415). Für die hier zuletzt angeführten Flächenklassen gibt Verf. allgemeine (teilweise integrallose!) analytische Darstellungen. Für die halbisotropen Flächen in S_4 mit zwei Scharen konjugierter Kurven [Fall (Ia)] gilt: Ihre Schar isotroper Kurven (es gibt nur eine solche!) fällt mit einer der beiden Scharen konjugierter Kurven zusammen; ihre Laplace-Transformierten (nach den isotropen Kurven) sind wiederum halbisotrope Flächen. Von den Konstruktionsprinzipien und analytischen Darstellungen dieser Flächen sei insbesondere eine erwähnt, die von ∞^2 Tangential- S_3 der absoluten Maßfläche ausgeht. Es handelt sich um die analytische Darstellung:

$$\begin{aligned} y^1 &= uy^4, & y^2 &= vy^4 + f_{10}, & y^3 &= vy^1 + uy^2 - uv y^4 - f, \\ y^4 &= -f_{11} - \varepsilon \sqrt{f_{20}f_{02}}, & y^5 &= 1, & \varepsilon^2 &= 1 \end{aligned}$$

in geeigneten projektiven Koordinaten y^1, \dots, y^5 mit einer willkürlichen Funktion $f(u, v)$ ($f_{10} = \frac{\partial f}{\partial u}, \dots$). Dabei sind

$$x^1 = \frac{y^1 + y^2}{2}, \quad x^2 = \frac{y^1 - y^2}{2i}, \quad x^3 = \frac{y^3 + y^4}{2}, \quad x^4 = \frac{y^3 - y^4}{2i}$$

kartesische Koordinaten. Anschließend wird die zugehörige partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung behandelt, der diese Flächenklasse genügt, und die Theorie der Laplace-Transformierten entwickelt. — Für die halbisotropen Flächen in S_4 mit einer Schar von Asymptotenkurven [Fall (Ib)] gilt: Die Asymptotenkurven sind notwendig Geraden. Diese Flächen sind also („nichtabwickelbare“) Regelflächen. Bei ihrer näheren Untersuchung benutzt Verf. eine Arbeit des Ref., wobei deren Ergebnisse zum Teil berichtet, zum Teil bemerkenswert ergänzt werden (vgl. dies. Zbl. 23, 72).

M. Pinl (Augsburg).

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Gheorghiu, Gh. Th.: Sur une classe de surfaces. Bull. sci. École polytechn. Timişoara 10, 87–92 (1941).

Ist K das Krümmungsmaß und d der Abstand des Koordinatenanfangspunktes von der Tangentenebene des Punktes M einer Fläche S , so ist $J = K \cdot d^4$ eine affine Invariante von S . Wenn J für alle Punkte von S konstant ist, so ist S eine Affin-

Sphäre. Verf. untersucht die Flächen, auf denen J längs einer Schar von Asymptotenlinien konstant ist. Es werden Integrabilitätsrelationen aufgestellt und zwei leicht integrable Sonderfälle bestimmt, von denen der erste die Regelflächen enthält. Hier ist J auf den geradlinigen Erzeugenden konstant. *W. Haack* (Karlsruhe).

Buzano, Piero: Sull'invariante proiettivo di una terna di elementi curvilinei del 1. ordine. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. 3, 201—207 (1941).

Drei lineare Elemente (Gerade und auf ihr liegender Punkt) besitzen eine projektive Invariante, die den Wert 1 hat, wenn die Elemente einem Kegelschnitt angehören. Ist umgekehrt für drei beliebige Elemente einer Kurve jene Invariante stets konstant, so hat sie den Wert 1, und die Kurve ist ein Kegelschnitt. Hat eine Kurve die Eigenschaft, daß ein auf ihr bewegliches lineares Element mit zwei festen Elementen einen konstanten Wert der Invarianten ergibt, so ist sie eine W -Kurve. Die Punktgruppen auf einer algebraischen Kurve C^n , deren Punkte die Zentren von linearen Elementen sind, die zusammen mit zwei festen Elementen Niveaugruppen der Invarianten sind, beschreiben auf C^n eine Linearschar; Verf. bestimmt ihre Basisgruppe und das sie ausschneidende Kurvenbüschel. *E. Bompiani* (Roma).

Hsiung, Chuan-Chih: On the curvature form and the projective curvatures of curves in space of four dimensions. *Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat.* 1, 159—171 (1940).

L'A. servendosi di sviluppi canonici (formole analoghe a quelle di Frenet) per le curve di uno spazio proiettivo a 4 dimensioni date da B. Su [*Sc. Rep. Univ. of Chekiang* 2, 115—169 (1937)] assegna il significato geometrico degli invarianti proiettivi (curvature) di una curva per mezzo di birapporti. *E. Bompiani* (Roma).

Su, Buchin: Some arithmetical invariants of a curve in projective space of n dimensions. *Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat.* 1, 143—157 (1940).

Si considerino una curva Γ di S_n , un suo punto P e un piano α contenuto nello S_m osculatore in P a Γ (e che incontri la tangente in P). Si seghino col piano α il cono che proietta da P gli S_{n-3} osculatori a Γ e la sviluppabile circoscritta a Γ : l'Autore dimostra che le sezioni sono tangenti fra loro in un punto e hanno ivi un invariante di contatto che dipende da m ma non da α , nè da P , nè da Γ . La dimostrazione è basata su un calcolo di Wronskiani. Casi particolari erano già stati considerati da Servais, Bompiani (questo Zbl. 16, 75) e dallo stesso Autore. Un risultato analogo sussiste sostituendo il piano α con un S_{m-1} contenuto nello S_m osculatore in P e considerando le sezioni di S_{m-1} col cono che proietta da P gli S_{n-m} osculatori a Γ e con la varietà generata dagli S_{n-m+1} osculatori a Γ . *P. Buzano* (Torino).

Su, Buchin: A note on the planar point of a surface. *Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat.* 1, 95—103 (1940).

Le superficie con un punto di flesso (o planare) sono state studiate da V. G. Grove [*Trans. Amer. Math. Soc.* 40, 155—166 (1936); questo Zbl. 14, 277] e da I. Popa [*Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. 26, 147—150 (1937); *Rend. Semin. mat. Roma*, IV. s. 2, 136—155 (1938); questo Zbl. 18, 235, 19, 84; il Su sembra non conoscere questo secondo lavoro che contiene risultati relativi anche ad un flesso d'ordine qualunque]. Sia gli AA. precedenti che il Su ricorrono alla nozione da me introdotta [*Boll. Un. Mat. Ital.*, I. s. 5, 118—120 (1926)] di punti e rette covarianti (osculanti) associati ad intorni successivi di una singolarità di una curva piana. — Il Su servendosi degli sviluppi di Popa per una superficie con un punto di flesso ordinario O , esamina particolarmente le sezioni piane per le tre tangenti a contatto quadripunto (iperosculatrici). Queste sezioni definiscono su ciascuna tangente un punto (osculante): l'allineamento dei tre punti così ottenuti è condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di una (e quindi di ∞^{19}) superficie del 4° ordine avente contatto del 5° ordine in O con quelle sezioni piane. — Fra queste e per ogni tangente iperosculatrice ve ne sono due i cui elementi del 5° ordine in O appartengono ad una curva del 4° ordine avente in O la stessa singolarità della sezione e altrove un punto triplo a tangenti coincidenti. I loro piani sono naturalmente covarianti. *E. Bompiani*.

Bompiani, Enrico: *Sulle superficie con flessi infinitamente vicini.* Atti Accad. Italia, VII. s. 2, 497—510 (1941).

Bekanntlich besitzt eine Fläche des S_3 im allgemeinen keine Flachpunkte (Wendepunkte), d. h. solche, in denen die Berührungsebene nicht nur die Umgebung erster, sondern auch die zweiter Ordnung des Punktes auf der Fläche enthält; solche Punkte können auch dadurch gekennzeichnet werden, daß alle durch sie gehenden Flächen-tangenten mit der Fläche eine mindestens dreipunktige Berührung eingehen. Verf. untersucht die Flächen, auf denen zwei oder mehrere unendlich benachbarte Flachpunkte vorkommen, und speziell Flächen, die Kurven aus Flachpunkten enthalten. Er beweist zunächst, daß, wenn eine Fläche zwei unendlich benachbarte Flachpunkte enthält, jedes Kurvenelement dritter Ordnung auf der Fläche, das sie enthält, stationäre Schmiegungebenen besitzt; daraus folgt, daß, wenn die Fläche eine Kurve aus Flachpunkten besitzt, diese notwendig aus ebenen Kurven (speziell Geraden) besteht. Handelt es sich insbesondere um eine algebraische Fläche der Ordnung n mit einer Kurve aus Flachpunkten, so hat eine ebene Komponente der letzteren eine Ordnung k , die der Ungleichung $3k \leq n$ genügt; ist daher insbesondere $n = 3, 4, 5$, so besteht die Kurve der Flachpunkte notwendig aus Geraden. Ist die Fläche algebraisch, so genügt die Tatsache des Vorhandenseins einer passenden Anzahl unendlich benachbarter Flachpunkte, um die Existenz einer ganzen Kurve aus Flachpunkten sicherzustellen. Verf. untersucht die Bedingung, damit eine Fläche k auf einer Geraden unendlich benachbarte Flachpunkte besitzt, und gelangt zu folgenden Sätzen: a) Besitzt eine algebraische Fläche n -ter Ordnung $n - 1$ auf einer Geraden unendlich benachbarte Flachpunkte, so ist jeder Punkt dieser Geraden Flachpunkt, und auf dieser liegen $n - 1$ biplanare Punkte. Für $n = 3$ erschöpft dieser Satz eine von Ciani (dies. Zbl. 23, 365) aufgeworfene Fragestellung. b) Besitzt eine Fläche 4. oder 5. Ordnung vier bzw. sechs unendlich benachbarte Flachpunkte, so hat sie notwendig unendlich viele Flachpunkte auf den Punkten einer Geraden. Weiterhin untersucht Verf. die Verteilung unendlich benachbarter Flachpunkte, falls deren Anzahl nicht ausreicht, um die Existenz unendlich vieler Flachpunkte nach sich zu ziehen, und gelangt zu folgendem Satz: Besitzt eine F^n drei unendlich benachbarte Flachpunkte auf einem Kurvenelement zweiter Ordnung E_2 mit dem Anfangspunkt O , so ist dieses durch den berührenden Ebenenschnitt in O vollkommen bestimmt; zu seiner Konstruktion betrachte man die $(n - 4)$ -te Polare von O bezüglich des genannten Schnittes, die in die zweimal gezählte Tangente und einen Kegelschnitt zerfällt; mit dem letzteren besitzt E_2 in O die Berührungsinvariante $(n - 3)/3$. Hingegen kann man auf einer Fläche 5. Ordnung die Existenz von mehr als drei unendlich benachbarten Flachpunkten nicht mehr bloß aus der Natur des berührenden Ebenenschnittes in einem derselben erschließen. In der Tat zeigt Verf., daß, wenn eine F^6 ein Element E_3 mit dem Anfangspunkt O aus Flachpunkten besitzt, die Tangente in O an E_3 ganz auf F^5 liegt. Ist das zu E_3 gehörige E_2 kein Wendeelement, so besitzt der berührende Ebenenschnitt in O nach Beseitigung der Tangente an E_2 einen Berührungsknoten, dessen lineare Zweige in O die Berührungsinvariante $\pm i$ haben; durch ihn ist das Element E_2 vollkommen bestimmt, während das gleiche nicht für E_3 gilt. Ist hingegen das Element E_2 von E_3 ein Wendeelement, so gehört nicht nur seine Tangente in O der F^5 an, sondern es ist auch längs seiner die Berührungsebene fest. In diesem Falle ist das Element E_3 der Flachpunkte vollkommen durch seine Berührungsinvariante mit dem zu der von der Berührungsebene in O ausgeschnittenen Kubik gehörenden E_3 bestimmt. Ist E_3 Wendeelement, so besteht die Gerade der vier Flachpunkte aus lauter Flachpunkten. Eine F^5 kann ein Element E_4 aus Flachpunkten besitzen, ohne deren unendlich viele aufzuweisen, falls die ersten drei Flachpunkte auf einer Geraden liegen. *Mario Villa.*

Maxia, A.: *Sui sistemi di curve tracciate su di una superficie.* Boll. Un. Mat. ital., II. s. 3, 367—369 (1941).

Auf einer Fläche S mit lauter nicht parabolischen Punkten im gewöhnlichen

Räume betrachtet man ein doppeltes System (u, v) von nicht asymptotischen Linien und das System Σ , das auf S von den Torsen der Kongruenz ausgeschnitten wird, die von den Schnittgeraden der Schmiegeebenen der Linien u, v in den Punkten von S gebildet wird. Die zwei Elemente dritter Ordnung der durch einen Punkt von S gehenden Linien u, v bestimmen eine projektive Invariante J . Mit Hilfe der Differentialgleichungen der Asymptotenlinien und des Systems Σ sowie des Ausdrucks von J in den Koeffizienten jener Gleichungen beweist Verf., daß mit zwei von folgenden Eigenschaften auch die dritte gilt: 1. Das System (u, v) ist auf S konjugiert oder apolar zu Σ ; 2. $J = 1$; 3. Σ ist konjugiert auf S . Wenn die Linien (u, v) geodätisch sind, so ist die dritte Eigenschaft stets erfüllt, und wenn daher 1. gilt, muß 2. gelten und umgekehrt.

P. Buzano (Torino).

Finikoff, S.: Couple de surfaces en correspondance biunivoque dont les axes homologues relativement à la base de la correspondance coïncident. Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat. 1, 313—331 (1940).

Sind M_1, M_2 zwei Laplacesche Transformierte des Punktes M eines konjugierten Kurvennetzes B , so nennt man die Gerade M_1M_2 die zweite Achse des Netzes B und die Schnittgerade der Tangentenebenen an die Flächen $(M_1), (M_2)$ die erste Achse von B . Verf. beantwortet die Frage: Gibt es zwei umkehrbar eindeutig zugeordnete Flächen (M) und (N) mit dem konjugierten Netz B als Basis der Zuordnung derart, daß die beiden Achsen des Netzes B auf (M) mit demjenigen von B auf (N) zusammenfallen? Dabei ist die direkte Koinzidenz, in der die erste Achse von (M) mit der ersten von (N) und die zweite von (M) mit der zweiten von (N) zusammenfällt (Problem A), von der inversen Koinzidenz (Problem B) zu unterscheiden. — Eine evidente Lösung bildet jede Laplacesche Folge der Periode vier, MM_1NM_2 . Hier sind zwei gegenüberliegende Flächen Lösung des Problems A, zwei benachbarte Flächen Lösung des Problems B. — Die allgemeine Lösung des Problems A führt auf die konjugierten Netze von Wilczynski (= Netze, deren Tangentensysteme linearen Komplexen angehören). Die Achsen eines Wilczynski-Netzes erzeugen ein Paar stratifizierbarer Strahlensysteme. Die beiden Scharen stratifizierender Flächen seien S und S' . Die Gesamtheit der Flächen S, S' läßt sich in ∞^1 Serien einteilen derart, daß eine Serie eine Wilczynski-Folge bildet. Dann gehören die Flächen mit geradem Index zu S und die mit ungeradem zu S' . Zwei Flächen S oder zwei Flächen S' bilden die allgemeine Lösung des Problems A; eine Fläche S und eine S' stellen Lösungen des Problems B dar. Das Problem B gestattet außerdem noch zwei weitere Lösungen: nämlich die Brennflächen einer Kongruenz, die einem linearen Komplex angehört, und zwei konjugierte Netze, die Jonas-Transformierte von einander sind mit der Bedingung, daß die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte eine lineare Kongruenz bilden.

W. Haack (Karlsruhe i. B.).

Ermolaev, L.: Une classification des correspondances ponctuelles biunivoques entre les surfaces analytiques. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. 31, 425—427 (1941).

Data una corrispondenza puntuale fra due superficie dello spazio proiettivo a tre dimensioni rimane definita in conseguenza una corrispondenza fra le tangenti in punti corrispondenti. Questa corrispondenza considerata insieme alle involuzioni delle tangenti coniugate nei due punti dà luogo ad una classificazione delle corrispondenze (questo Zbl. 23, 70).

E. Bompiani (Roma).

Terracini, Alejandro: Flächen mit parabolischen Projektionen. Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat. 1, 221—254 (1940) [Spanisch].

S sei eine Fläche des S_5 , die keiner Laplaceschen Gleichung genügt; sie werde von einem Punkt Ω aus in einen vorgegebenen S_4 projiziert; dann erfüllt die projizierte Fläche S' als Fläche eines S_4 stets eine Laplacesche Gleichung, aber diese gehört nur in Sonderfällen dem parabolischen Typus an, und in diesen Fällen soll auch S' vom parabolischen Typ heißen. Es ist leicht, eine Fläche S zu konstruieren, die wenigstens eine Projektion parabolischen Typs in einem vorgegebenen S_4 besitzt; man braucht

in der Tat nur im S_4 eine Fläche S' parabolischen Typs zu nehmen und S beliebig auf dem Kegel zu wählen, der S' mit einem Punkt Ω des S_5 verbindet. Weiter handelt es sich um die Frage, ob eine Fläche S , die eine Projektion parabolischen Typs besitzt, noch andere derartige Projektionen (von andern Zentren aus) und dann wieviele höchstens besitzen kann. Verf. beantwortet diese Frage durch den Nachweis, daß diejenigen Kurven von S , die bei der Projektion aus Ω in die Charakteristiken einer parabolischen Projektion S' übergehen, ein System von Hauptkurven (linee principali) auf S bilden, und daß überdies diese Kurven bei der Projektion von einem andern Zentrum Ω' aus nicht in die Charakteristiken einer andern parabolischen Projektion übergehen können. Da nun eine Fläche des S_5 , wenn man von der Veroneseschen Fläche absieht, fünf Systeme von Hauptkurven besitzt, folgt, daß sie höchstens fünf parabolische Projektionen von verschiedenen Zentren aus besitzen kann. Hiernach gelingt die Herstellung einer Fläche S mit zwei Zentren Ω_1, Ω_2 parabolischer Projektion; Verf. charakterisiert weiter ihre Projektion von der Geraden $\Omega_1\Omega_2$ aus auf einen S_3 , indem er speziell den Fall betrachtet, daß die Asymptotenlinien und die Darbouxschen Kurven auf der Projektion im S_3 Projektionen der fünf Systeme von Hauptkurven auf S sind. Mehr Beachtung verdient die Untersuchung der Flächen S mit drei Zentren parabolischer Projektion; diese drei Zentren liegen nicht auf einer Geraden, und S projiziert sich von den drei sie paarweise verbindenden Geraden aus in den S_3 in ein asymptotisches Flächentripel, dessen Studium der Rest der Arbeit gewidmet ist. Die Untersuchung der Flächen S mit 4 oder 5 Zentren parabolischer Projektion bleibt noch offen.

P. Buzano (Torino).

Buzano, Piero: Interpretazione geometrica delle caratteristiche di un'equazione a derivate parziali del 1° ordine. Atti Accad. Italia, VII. s. 2, 703—716 (1941).

Die unabhängig von den Bedingungen $z = z(x_1, \dots, x_n)$ und $\frac{\partial z}{\partial x_i} = p_i$ betrachtete partielle Differentialgleichung (1) $f(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n) = 0$ kann in einem projektiven Raume Ω_{n+1} mit den homogenen Punktkoordinaten $(1, x_1, \dots, x_n, z)$ und den Ebenenkoordinaten $(p_0, p_1, \dots, p_n, 1)$ bei der Zusatzbedingung $p_0 = z - p_1 x_1 - \dots - p_n x_n$ als Gesamtheit von ∞^2 Elementen gedeutet werden, deren jedes aus einem Punkt (Zentrum) und einer hindurchgehenden Hyperebene (Seite) besteht. Es ist dann naturgemäß, auf die Abbildung dieser Elemente in der Segremannigfaltigkeit zurückzugreifen, deren Punkte birational den Punkt-Hyperebenen-Paaren des Ω_{n+1} entsprechen. Die Bildmannigfaltigkeit von (1) gehört dem Hyperebenenchnitt der Segremannigfaltigkeit an, der die inzidenten Paare abbildet. — Verfolgen wir die Ergebnisse für $n = 2$! Dann ist $\Omega_{n+1} \equiv S_3$; die Segremannigfaltigkeit ist eine V_6^{20} des S_{15} , ihr Hyperebenenchnitt eine V_5^{20} des S_{14} , die die Bild- V_4 von (1) enthält. Zu jedem festen Punkt des S_3 bestimmt (1) eine Hülle (Kegel) und auf jeder Ebene derselben eine Gerade (erste Charakteristik). Auf jeder festen Ebene bestimmt (1) eine Kurve und für jeden Punkt derselben eine Tangente (zweite Charakteristik). Betrachtet man nun eine ∞^1 -Gesamtheit von Elementen (Streifen) derart, daß die Ebene eines Elementes den Punkt des unendlich benachbarten Elementes enthält, so erhält man in jedem ihrer Punkte zwei spezielle Geraden; erstens die Verbindungsgerade der beiden unendlich benachbarten Punkte, zweitens die Schnittgerade der beiden benachbarten Elementenebenen. Ein Streifen heißt für (1) charakteristisch, wenn jedes Element (1) befriedigt und die beiden speziellen Geraden mit den beiden Charakteristiken (der gleichen Zählung) zusammenfallen. — Im S_{14} gehen durch einen Punkt A der V_4 zwei Ebenen der V_5^{20} , die sie in Kurven schneiden, deren Tangenten in A eine charakteristische Ebene aufspannen. Jede einem Element angehörende (d. h. in seiner Seite liegende und das Zentrum enthaltende) Gerade bestimmt ∞^1 Elemente des Systems (1) und daher auf V_4 eine Kurve. Dem durch ein Element bestimmten Geradenbüschel entsprechen dann ∞^1 solcher Kurven durch einen Punkt der V_4 , ihre Tangenten liegen auf einem quadratischen Kegel eines S_3 . Ein charakteristischer Streifen wird durch eine Kurve

abgebildet, deren Tangente in jedem Punkte die Polare der (dem gleichen S_3 angehörenden) charakteristischen Ebene bezüglich des genannten quadratischen Kegels ist. — Eine Fläche (∞^3 aus den ∞^4 durch (1) definierten Elementen) ist Integralfäche von (1), wenn ihre Bild- V_3 in V_4 in jedem Punkte als Tangential- S_3 den S_3 jenes quadratischen Kegels hat.

E. Bompiani (Roma).

Kowalewski, Gerhard: Zur natürlichen Geometrie der irreduziblen G_6 von Berührungstransformationen. J. reine angew. Math. 183, 243—250 (1941).

Berechnung und Untersuchungen über die Fundamentalgrößen (Bogenelement, Differentialinvariante, Relativkoordinaten) einer auf der irreduziblen Lieschen Gruppe G_6 von Berührungstransformationen aufgebauten natürlichen Geometrie, wobei den Ausgangspunkt wohlbekannte Tatsachen aus der natürlichen Geometrie der speziellen Affingruppe $x' = a_1x + a_2z + a$, $z' = b_1x + b_2z + b$ ($a_1b_2 - a_2b_1 = 1$) bilden. Insbesondere werden die sog. J -Kurven der G_6 , die durch einen konstanten Wert der Differentialinvariante längs einer solchen Kurve gekennzeichnet sind, untersucht und ihre natürliche Parameterdarstellung abgeleitet. Die J -Kurven fallen mit den geodätischen Linien der G_6 zusammen.

O. Borůvka (Brünn).

Cicco, John de: The geometry of fields of lineal elements. Trans. Amer. Math. Soc. 47, 207—229 (1940).

Die Arbeit soll als Weiterführung von Arbeiten von E. Kasner und Verf. (siehe z. B. dies. Zbl. 17, 128; 19, 275; 20, 399) angesehen werden. [Die Grundbegriffe sind in der Arbeit von Kasner, The group of turns and slides and the geometry of turbines, Amer. J. Math. 33, 193—202 (1911), eingeführt worden.] — Als Elemente eines Raumes \mathfrak{R} werden Linienelemente (Vektoren) einer euklidischen Ebene betrachtet, und für diesen Raum wird neben der Gruppe M_3 (der Translationen und Drehungen) der Bewegungen, die auf die Punkte wirkt und zugleich Linienelemente in die Linienelemente überführt, eine andere Gruppe W_3 eingeführt, welche Wirbelgruppe heißt, und welche unmittelbar auf die Linienelemente wirkt. Sie besteht aus den sog. Umwendungen (the turns) und Schiebungen (the slides). Die beiden Gruppen M_3 und W_3 erzeugen in \mathfrak{R} eine sechsparametrische Gruppe G_6 . Den Gegenstand dieser Arbeit bildet die Aufstellung der Analoga in \mathfrak{R} in bezug auf G_6 einiger klassischer Resultate, die im dreidimensionalen euklidischen Raum in bezug auf die Gruppe der Bewegungen gelten. Insbesondere werden die Analoga der folgenden Sätze hergestellt: Sätze von Meusnier, Euler, Joachimstal, Beltrami-Enneper. Es wird der Begriff der Gaussischen Krümmung einer „Fläche“ in \mathfrak{R} und einer „abwickelbaren Fläche“ eingeführt, sowie die Begriffe der „geodätischen“ und „asymptotischen“ Fläche. Eine wichtige Rolle spielt hier der Begriff der „konjugierten Flächen“.

St. Golab (Krakau).

Cartan, Élie: Sur des familles d'hypersurfaces isoparamétriques des espaces sphériques à 5 et à 9 dimensions. Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat. 1, 5—22 (1940).

Pour trouver dans un espace sphérique à $n = p\nu + 1$ dimensions, $\sum_1^{n+1} x_i^2 = 1$, les familles d'hypersurfaces isoparamétriques correspondant à p courbures principales distinctes du même degré de multiplicité ν on a à déterminer un polynôme homogène entier F du degré p en x_1, \dots, x_{n+1} qui satisfait aux relations

$$(1) \quad \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 = p^2 (\sum x_i^2)^{p-1}, \quad \sum \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} = 0.$$

L'équation générale de la famille cherchée est (2) $F = \cos pt$. — Pour $p = 4$ il n'y a que deux cas possibles, à savoir $\nu = 1$ et $\nu = 2$. Dans le premier cas ($n = 5$) on peut se servir de trois variables complexes x, y, z pour lesquelles $x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z} = 1$ et l'on obtient d'après (1)

$$(3) \quad F \equiv -(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}) + 2(x^2 + y^2 + z^2)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \cos 4t.$$

L'hypersurface générale $t = \text{const}$ est le lieu du point $M = (A \cos t + iB \sin t)e^{i\theta}$ lorsqu'on fait varier les vecteurs A, B unitaires rectangulaires, réels et le nombre θ

réel; (x, y, z sont les projections de M sur des axes rectangulaires fixes d'un espace euclidien auxiliaire à trois dimensions). En partant du point général M , on peut calculer la première forme fondamentale $d\bar{M}d\bar{M}$ et la seconde forme fondamentale qui est la partie réelle de $d\bar{N}d\bar{M}$, N étant le point situé à une distance $\pi/2$ de M sur le grand cercle orthogonal à l'hypersurface en question. Ces formes nous donnent en effet les (quatre) courbures principales constantes. — Le second cas ($n = 9$) peut être étudié au moyen des dix coordonnées $x_{ij} = -x_{ji}$. En posant $\Phi \equiv \sum_1^5 X_i^2$,

$\Psi \equiv x_{12}^2 + \dots + x_{15}^2$ (où $3X_1 = x_{23}x_{45}$, etc.) on trouve par le calcul direct des paramètres différentiels $F \equiv \Psi^2 - 8\Phi = \cos 4t$. L'hypersurface générale $t = \text{const}$ peut être décrite au moyen du bivecteur $M = A \cos t + B \sin t$, où A et B désignent deux bivecteurs (dans un espace auxiliaire à quatre dimensions) variables simples, unitaires et conjugués entre eux. En utilisant cette description on peut parvenir aux propriétés intéressantes de l'hypersurface en question. Hlavatý (Prag).

Dwinger, Ph.: Der Satz von Bonnet für geradlinige Flächen im elliptischen Raum. *Nieuw Arch. Wiskde* **20**, 288—290 (1940).

Unter Benutzung gewisser von Blaschke abgeleiteter Formeln aus der elliptischen Differentialgeometrie der Regelflächen überträgt Verf. zuerst den Satz von Bonnet auf den elliptischen Raum. Nach Dualisierung der so gewonnenen Formulierung und einem üblichen Entartungsverfahren (Grenzübergang) gelangt er zu folgendem Gegenstück des euklidischen Bonnetschen Satzes: Wenn ein Streifen auf einer geradlinigen Fläche zwei der folgenden Eigenschaften hat, besitzt er auch die dritte: 1. Er ist ein isogonaler Streifen. 2. Er ist „geodätisch“. 3. Er ist der Kehlstreifen. — Es folgt noch eine Anwendung auf den Asymptotenstreifen. D. Barbilian (Bukarest).

Blaschke, W.: Sulla geometria di Hermite. *Rend. Semin. mat. fis. Milano* **13**, 58—65 (1939).

Nach einer kurzen historischen Einleitung und Erwähnung der elementaren Begriffe einer Hermiteschen Geometrie gibt Verf. die Frenetschen Formeln einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit aus der Hermiteschen Ebene an. Den zweidimensionalen (reellen Dimensionen!) Mannigfaltigkeiten wird ein symmetrischer Haupttensor ($\bar{g}_{rs} = g_{rs}$) zugeordnet. Der reinimaginäre Teil von g definiert eine Parallelverschiebung. — Auch die Integralinvarianten der Hermiteschen Geometrien, d. h. die Dichte einer Geradenmenge, der „Flächeninhalt“ und die kinematische Dichte zweier bidimensionalen Mannigfaltigkeiten werden kurz dargelegt, unter Erwähnung der Resultate von W. Wirtinger und H. Rhode. D. Barbilian (Bukarest).

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Mira Fernandes, Aureliano de: Wiederabdruck von fünf Arbeiten. *Portugaliae Math.* **1**, Pt 2, Fasc. 2, 57—92 (1940).

Das Heft enthält den Wiederabdruck von 5 Arbeiten über Differentialgeometrie, die A. de Mira Fernandes in *Atti Accad. naz. Lincei*, VI. s. **17—25** (1933—1937) veröffentlicht hat (vgl. dies. Zbl. **6**, 376; **9**, 41; **11**, 419; **16**, 374; **17**, 88). H. Geppert.

Myers, S. B.: Riemannian manifolds with positive mean curvature. *Duke math. J.* **8**, 401—404 (1941).

Die Arbeit stellt in gewissem Sinne eine Weiterführung des Resultates dar, zu welchem Verf. in seiner früheren Arbeit [*Duke math. J.* **1**, 39—49 (1935); dies. Zbl. **11**, 225] gelangt ist. Das Hauptergebnis ist in folgendem Satze enthalten: Ein [im Sinne von Hopf und Rinow, *Comment. math. helv.* **3**, 209—225 (1934), S. 224; dies. Zbl. **2**, 350] vollständiger n -dimensionaler Riemannscher Raum V_n ($n \geq 3$), in welchem die mittlere Krümmung in jedem Punkte und in bezug auf jede Richtung $\geq a^2 > 0$ ist, besitzt folgende Eigenschaften: 1. V_n ist eine abgeschlossene Mannigfaltigkeit, 2. der Durchmesser von V_n überschreitet nicht die obere Grenze $\frac{\pi}{a} \cdot \sqrt{n-1}$, 3. V_n besitzt

eine endliche Fundamentalgruppe. — An einfachen Beispielen wird gezeigt, daß die obere Grenze $\frac{\pi}{a} \cdot \sqrt{n-1}$ genau ist und daß der Satz auf das frühere Resultat des Verf. nicht ohne weiteres zurückgeführt werden kann. Das Ergebnis der Arbeit kann insbesondere auf die Räume von konstanter und positiver mittlerer Krümmung (Einsteinsche Räume) angewandt werden. Bemerkung des Ref.: Vergleicht man die Ergebnisse dieser Arbeit mit einem Resultat von T. Y. Thomas [Amer. J. Math. **58**, 702—704 (1936); dies. Zbl. **15**, 273], so ergibt sich: Läßt sich eine vollständige Einsteinsche n -dimensionale Mannigfaltigkeit V_n mit positiver mittlerer Krümmung in einen $(n+1)$ -dimensionalen euklidischen R_{n+1} einbetten, so ist diese V_n von konstanter Krümmung, also ein S_n . *St. Golab* (Krakau).

Tonolo, A.: Alcune analogie fra la geometria delle varietà riemanniane a tre dimensioni e la meccanica dei mezzi continui. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **3**, 353—359 (1941).

Reprenant une idée de Cartan (Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann Gauthier-Villars 1928, p. 221—223) l'auteur analyse systématiquement, par la méthode du calcul de Ricci, le parallélisme existant entre le tenseur de courbure d'une variété riemannienne V_3 et le tenseur des forces de pression (par unité de surface) d'un milieu continu à trois dimensions. À la courbure riemannienne relative à un élément-plan correspond la composante de la force de pression, normale à la même direction d'élément-plan et à la quadrique indicatrice de Ricci, la quadrique bien connue de Cauchy. Les identités de Bianchi admettent l'interprétation mécanique suivante (déjà donnée par Cartan): Si un milieu continu est distribué dans une V_3 de façon que le tenseur des pressions coïncide avec le tenseur de Ricci de la V_3 , ce milieu est en équilibre sous l'action de ses forces élastiques. En rapportant la variété à ses congruences principales de lignes, l'auteur met les identités de Bianchi sous une forme équivalente aux équations classiques de Lamé. Ces résultats sont à rapprocher du mode de détermination du tenseur des pressions en Mécanique relativiste. *Lichnerowicz* (Paris).

Haimovici, M. M.: Sur la géométrie intrinsèque des surfaces non holonomes. 5. Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat. **1**, 173—188 (1940).

L'auteur traite le cas particulier d'une surface non holonome V_3^2 , à savoir le cas où V_3^2 , donnée par (1) $\omega_3 = A_1 dx^1 = 0$, est pourvue de l'élément linéaire ds^2 . En tenant compte de (1), on peut écrire $ds^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega\sigma$ (σ arb.), ce qui fait voir que les transformations

$$(2) \quad \bar{\omega}_i = A_i^j \omega_j, \quad A_3^1 = A_3^2 = 0, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

conservent tout V_3^2 que son ds^2 à condition que les coefficients A_v^u ($u, v = 1, 2$) soient des coefficients d'une transformation orthogonale. Parce qu'on a $\omega_3' = p[\omega_1\omega_2]$, on peut se servir de cette équation pour fixer le facteur arbitraire de ω_3 dans (1) de façon que l'on ait $\omega_3' = [\omega_1\omega_2]$. Cela étant on a donc à poser $A_3^3 = 1$ dans (2) tandis que A_2^3, A_1^3 peuvent être obtenus si l'on demande $\omega_3' = [\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2]$ ce qui revient à la définition intrinsèque de la normale à V_3^2 . [Le problème plus général fut résolu par Hlavatý, Čas. mat. fys. **66**, 229—260 (1937); Ann. of Math., N. s. **39**, 725—761 (1938); ce Zbl. **16**, 326; **20**, 71.] Les transformations (2) sont ainsi réduites au fond aux transformations orthogonales, et l'on peut définir le parallélisme dans V_3^2 pour en déduire (de la façon usuelle) la notion de la torsion et de la courbure de V_3^2 . *Hlavatý*.

Coburn, N.: Conformal unitary spaces. Trans. Amer. Math. Soc. **50**, 26—39 (1941).

Eine unitäre K_n ist eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer hermiteschen Geometrie (s. Schouten-Struik, dies. Zbl. **11**, 174 u. **19**, 183). Verf. wiederholt zunächst die Definitionen und Haupteigenschaften der unitären K_n und befaßt sich sodann mit der Frage, wann zwei unitäre K_n konform aufeinander abgebildet werden können. Es ergeben sich dabei einige merkwürdige Theoreme. U. a. wird gezeigt, daß bei der konformen Abbildung geodätische Linien in geodätische Linien übergehen. Zum Schluß wird ein besonderer Typus von unitären K_n behandelt, deren Fundamentaltensor sich in der Form $\beta \partial_\alpha \partial_\gamma \log k$ schreiben läßt. Für $\beta = 1$

sind solche unitäre K_n schon von Mitrochin, Fuchs und Bergmann betrachtet worden. Die konforme Abbildung solcher unitären K_n wird erörtert, und es gelingt, eine Konformkomitante der Valenz 4 zu bilden. *Schouten (Delft).*

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Roger, Frédéric: Sur l'indétermination de certaines limites. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 66—68 (1941).

Die Note beschäftigt sich mit einer wichtigen Frage der direkten Differentialgeometrie; doch fehlen wegen der Kürze nicht nur alle Beweise, sondern auch die verwendeten Begriffe sind nur flüchtig gestreift. Ref. wagt daher nicht, die unklare Behauptung des Verf. genau zu formulieren. Doch scheint es sich ungefähr um folgendes zu handeln: M sei eine k -dimensionale Mannigfaltigkeit im euklidischen E_n . (Aus dem Text geht nicht klar hervor, ob hier tatsächlich eine Mannigfaltigkeit oder etwas anderes gemeint ist.) Bezeichne ferner $S(p_1, p_2, \dots, p_r)$ eine $(n-k)$ -dimensionale, analytisch darstellbare, durch die Punkte p_1, p_2, \dots, p_r von M bestimmte Mannigfaltigkeit. (Auch dieser Begriff ist unklar.) Es wird behauptet, daß außer einer k -dimensionalen Nullmenge (vermutlich ist hier das Carathéodorysche k -dimensionale Maß gemeint) die Grenzmenge $\lim_{p_1, p_2, \dots, p_r \rightarrow p} S(p_1, p_2, \dots, p_r)$ entweder vollkommen unbestimmt ist, oder aber nur dieselben Unbestimmtheitsmöglichkeiten vorkommen, die auftreten könnten, wenn M durch analytische Funktionen dargestellt wäre.

G. Alexits (Budapest).

Egerváry, Eugène, et Georges Alexits: Fondements d'une théorie générale de la courbure linéaire. Comment. math. helv. **13**, 257—276 (1941).

In Weiterführung früherer Arbeiten der beiden Verff. wird I) im Sinne der direkten Differentialgeometrie eine Theorie der linearen Krümmungen allgemein für (semi-)metrische Räume gegeben, und II) gezeigt, daß diese als Spezialfall die Krümmungstheorie für differenzierbare Bogen in euklidischen Räumen umfaßt. — Im einzelnen sei folgendes erwähnt: I) Es sei p, q der Abstand der Punkte p, q des metrischen Raumes

M und $D(q_1, \dots, q_m)$ die Determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \|q_i q_j\|^2 \end{vmatrix}$ mit $i, j = 1, \dots, m$. Ferner sei

$$k(p_0, p_1, \dots, p_{n+1})$$

$$= ((n+1) : \|p_0 p_{n+1}\|) \cdot \sqrt{|D(p_0, \dots, p_{n+1}) \cdot D(p_1, \dots, p_n)| : |D(p_0, \dots, p_n) \cdot D(p_1, \dots, p_{n+1})|},$$

wobei die auftretenden Nenner nicht Null sein sollen. Für $n \geq 2$ ist k i. a. von der Reihenfolge der p_ν abhängig. Als n -te Linearkrümmung $k_n(p_0)$ von M in p_0 wird bezeichnet $\lim_{p_\nu \rightarrow p_0} k(p_0, \dots, p_{n+1})$, $\nu = 1, \dots, n+1$, falls er existiert, wobei jedes

$(n+1)$ -tupel p_1, \dots, p_{n+1} aus M zugelassen wird und jede Reihenfolge, für welche k existiert. Hingegen bezeichnet man $k_n^*(p_0) = \lim_{p_\nu \rightarrow p_0} k(p_1, \dots, p_{n+2})$, $\nu = 1, \dots, n+2$,

falls er existiert, als n -te Linearkrümmung 2. Art. In einem kompakten M existiert dann und nur dann überall $k_n^*(p_0)$, wenn überall $k_n(p_0)$ existiert und stetig ist. II) Nimmere sei M ein Kontinuum in einem euklidischen E_k . Besitzt M überall von Null verschiedene, stetige $k_{k-1}(p)$, so ist M lokal zusammenhängende Summe abzählbar vieler rektifizierbarer Bogen, welche paarweise nur endlich viele Punkte gemeinsam haben. Ist M speziell ein Bogen, dessen Koordinaten $x_\varrho, \varrho = 1, \dots, k$, in p_0 Ableitungen $x_\varrho^{(n)}$ nach der Bogenlänge bis zur $(n+1)$ -ten Ordnung einschließlich besitzen

mit $\left| \sum_{\varrho=1}^k x_\varrho^{(i)} x_\varrho^{(j)} \right| \neq 0$, $i, j = 1, \dots, n$, so existiert $k_n(p_0)$. Sind die $x_\varrho^{(n+1)}$ sogar stetig

in p_0 , so existiert $k_n^*(p_0)$. Die $k_\nu(p_0)$ stimmen mit den in den Frenetschen Formeln (für den E_n) auftretenden Koeffizienten (Krümmungen) überein. Ist M ein rektifizierbarer Bogen und ist überall $k_n(p_0) = 0$, so liegt M in einer n -dimensionalen Ebene. Bezüglich weiterer Einzelheiten sei auf die Arbeit selbst verwiesen.

Haupt (Erlangen).

Schoenberg, I. J.: On metric arcs of vanishing Menger curvature. *Ann. of Math.*, II. s. 41, 715—726 (1940).

Es bezeichne ab den Abstand der Punkte a, b eines metrischen Raumes R . Die Zahl

$$\kappa(a) = \lim_{p, q \rightarrow a} \frac{\sqrt{(pq + pr + qr)(pq + pr - qr)(pq + qr - pr)(pr + qr - pq)}}{pq \cdot pr \cdot qr}$$

heißt — falls sie existiert — die Krümmung des Raumes R im Punkte a . Nach Menger [*Math. Ann.* 103, 466—501 (1930)] sind die Strecken unter allen euklidischen Bogen B durch die Eigenschaft $\kappa(a) = 0$ für alle $a \in B$ gekennzeichnet. Es blieb fraglich, inwiefern diese Kennzeichnung für nichteuklidische metrische Bogen richtig bleibt. Ein metrischer Raum heiße ptolemäisch, wenn für alle seine Punktequadrupel $ab \cdot cd + ad \cdot bc \geq ac \cdot bd$ gilt. Verf. zeigt, daß ein metrischer Bogen B , der als Raum betrachtet ptolemäisch ist, dann und nur dann mit einer Strecke kongruent ist, wenn $\kappa(a) = 0$ für alle $a \in B$ gilt. Da die Eigenschaft, ptolemäisch zu sein, die sog. Vierpunkteigenschaft umfaßt, hat Verf. durch seinen Satz die Gültigkeit der Mengerschen Kennzeichnung für metrische Bogen mit Vierpunkteigenschaft mitbewiesen. Menger hat nämlich ursprünglich diese Gültigkeit behauptet, sein Beweis war jedoch an einem Punkte unzureichend.

G. Alexits (Budapest).

Blaschke, Wilhelm: Questioni sui corpi convessi. *Boll. Un. Mat. ital.*, II. s. 3, 223—230 (1941).

Kurze Besprechung der Hauptverdienste von Archimedes, Jacob Steiner und Hermann Brunn um die Theorie der konvexen Gebilde. Archimedes: Monotonie von Inhalt und Umfang ineinandergeschachtelter, ebener Eibereiche; Steiner: Symmetrisierung, Übergang zum Parallelkörper; Brunn: Brunn-Minkowskische Ungleichung; Linearscharen. Man kann natürlich den Gedanken der positiven Linearkombination (L.k.) endlichvieler Eibereiche durch Integralbildung zu dem der L.k. unendlichvieler Eibereiche erweitern, und dann erhebt sich sofort die Frage nach den Kennzeichnungen der Eikörper C , die durch positive L.k. unendlichvieler Strecken entstehen; C muß einen Mittelpunkt haben; Verf. gibt die von ihm vermuteten kennzeichnenden Bedingungen an.

Harald Geppert (Berlin).

Fiala, F.: Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive. *Comment. math. helv.* 13, 293—346 (1941).

Die bisher für die euklidische und nichteuklidische Ebene bzw. die Kugel bekannten isoperimetrischen Ungleichungen werden für offene nicht-negativ gekrümmte Flächen erweitert. Die Fläche wird dabei als Riemannsche Mannigfaltigkeit gefaßt, wobei von der Vorstellung ausgegangen wird, daß sie durch eine cartesische Ebene (x, y) realisiert sei, der durch ein positiv-definites $ds^2 = E(x, y)dx^2 + 2F(x, y)dxdy + G(x, y)dy^2$ mit analytischen E, F, G und nichtnegativer Krümmung $K(x, y)$ eine Metrik aufgeprägt ist. Diese „Riemannsche Ebene“ soll ferner offen sein, d. h. es soll divergenten Linien unendliche Länge zukommen, eine Forderung, die der Vollständigkeit der Riemannschen Ebene im Sinne von Hopf und Rinow (dies. Zbl. 2, 350) gleichwertig ist. Ihr Gesamtinhalt ist unendlich groß (Theorem A). — Für die einfach geschlossen und analytischen (übrigens sogar: rektifizierbaren) Kurven \mathfrak{F} dieser Riemannschen Ebenen werden drei isoperimetrische Ungleichungen (I)—(III) und drei Theoreme B)—D) bewiesen. Ist L die Länge, A der Flächeninhalt von \mathfrak{F} und $\kappa(\mathfrak{F})$ das Integral der geodätischen Krümmung längs \mathfrak{F} , so gilt (I) $L^2 \geq 2A \cdot \kappa(\mathfrak{F})$. (I) kann man mittels der Bonnetschen Formel, falls $C(\mathfrak{F})$ das Doppelintegral der Gaußschen Krümmung $K(x, y)$ für den von \mathfrak{F} begrenzten Bereich bedeutet, auch so schreiben: (II) $L^2 \geq 2A(2\pi - C(\mathfrak{F}))$. Wegen $K(x, y) \geq 0$ ist $C(\mathfrak{F})$ kleiner als das über die ganze Riemannsche Ebene erstreckte Krümmungsintegral C_T . Somit folgt noch (III) $L^2 \geq 2A(2\pi - C_T)$, wobei der Ausdruck rechter Hand noch ≥ 0 bleibt. — Hinsichtlich des Gleichheitszeichens wird bewiesen, daß es in (I) nur dann zutreffend ist, wenn die Riemannsche Ebene zu einer Euklidischen isometrisch und die Kurve ein Kreis ist (Theorem B). Da in diesen Fällen $C(\mathfrak{F}) = 0$ ist, gilt Gleiches bezüglich

(II) und (III). — Betrachtet man in einer Riemannschen Ebene die Menge aller einfach geschlossenen Kurven und ordnet man jeder von ihnen den Wert des Quotienten $\frac{L^2(\mathfrak{F})}{A(\mathfrak{F})}$ zu, so verbürgt (III) für diese Werte die Existenz einer unteren Schranke. Man hat (Theorem C): $\lim_{\mathfrak{F}} \frac{L^2}{A} = 2(2\pi - C_T)$. Als Ausgangspunkt seiner Untersuchungen bezeichnet Verf. die Frage, ob in einer Riemannschen Ebene nicht-negativer Krümmung der Flächeninhalt aller einfach geschlossenen Kurven der Länge L nach oben beschränkt ist. Sie wird durch folgendes Theorem D) beantwortet: a) wenn die Gesamtkrümmung der Riemannschen Ebene $C_T < 2\pi$ ist, so existiert eine solche Schranke für jedes L ; b) wenn $C_T = 2\pi$ ist, so existiert eine (von der jeweiligen Riemannschen Ebene abhängige) positive, konstante Größe L^* (eventuell ∞), derart, daß für jedes $L < L^*$ eine obere Schranke für die Flächen der einfach geschlossenen Kurven der Länge L vorhanden ist. Die Existenz einer Kurve \mathfrak{F}_0 mit maximalem Inhalt ist dadurch natürlich nicht mitbewiesen. Es werden folgende Beispiele gegeben: Für einen Mantel eines einschaligen Hyperboloids gilt a); denn sein sphärisches Bild bedeckt weniger als die Halbkugel: $C_T < 2\pi$. Für das elliptische Paraboloid ist jedoch $C_T = 2\pi$. Die Konstante in b) ist dabei $L^* = \infty$. Für die Drehfläche des Meridians $z = \frac{1}{\cos x} \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$ ist jedoch $L^* = \pi^2$.

Der größere Teil der Arbeit ist der methodischen Vorbereitung der isoperimetrischen Untersuchungen gewidmet. Er kann aber für sich Interesse beanspruchen. Es wird darin die Frage nach einer sinngemäßen Übertragung der geodätischen Parallelkoordinaten auf die Riemannsche Ebene behandelt, wobei es sich in der Hauptsache um eine Garantie dafür handelt, daß die geodätischen Parallelkurven einer (analytischen) einfach geschlossenen Kurve \mathfrak{F} (vor allem die inneren darunter) nicht nur für infinitesimale, sondern sicher auch für endlich-große Parallelabstände regulär (= ohne singuläre Punkte) bleiben und die Ebene einfach überdecken. Zu diesem Zweck wird der Begriff der „wahren Parallelen“ einer solchen Kurve \mathfrak{F} im (vorzeichenbegabten) Abstände p geschaffen und als Ort der Punkte P definiert, die von der Kurve den „Abstand“ p haben, d. h. für die p die untere Grenze der Längen jener geodätischen Bögen ist, welche P mit den Punkten von \mathfrak{F} verbinden. Diese wahre Parallele setzt sich in endlicher Zahl aus analytischen Bögen von geodätischen Parallelkurven von \mathfrak{F} zusammen. Die Hauptschwierigkeit bilden dabei die Punkte, in denen diese einzelnen geodätischen Parallelkurven (unter Winkeln) aneinanderstoßen. Sie werden als Extrempunkte bezeichnet. Während nämlich für einen an \mathfrak{F} genügend nahen Punkt P die durch ihn gezogene zu \mathfrak{F} normale Geodätische kleinere Länge aufweist, als irgendeine andere Verbindungslinie von P mit den Punkten auf \mathfrak{F} , verliert sie diese Eigenschaft für Extrempunkte. — Die Länge $L(p)$ der wahren Parallelen von \mathfrak{F} im Abstände p ist (für regulär analytische \mathfrak{F}) in p stetig und (höchstens abgesehen von einer endlichen Anzahl oder für eine divergente Folge von Stellen p) analytisch und für ihre Ableitung gilt, je nachdem es sich a) um eine

äußere ($p > 0$) oder b) um eine innere wahre Parallele ($p < 0$) handelt: a) $\frac{dL(p)}{dp} \leq \kappa(\mathfrak{F}) - C(p)$,

b) $\frac{dL(p)}{dp} \geq \kappa(\mathfrak{F}) + C(p)$, wobei $\kappa(\mathfrak{F})$ wieder das Integral der geodätischen Krümmung längs \mathfrak{F}

und $C(p)$ das Integral der Gaußschen Krümmung im Ringe zwischen \mathfrak{F} und der betrachteten wahren Parallelen bezeichnet. — Die Innenfläche $A(\mathfrak{F})$ von \mathfrak{F} kann man so ausdrücken:

$A(\mathfrak{F}) = \int_0^{\bar{p}} L(p) dp$, wobei \bar{p} eine von \mathfrak{F} abhängige negative Konstante bedeutet. Im Falle

der Riemannschen Ebene positiver Krümmung erhält man dann die folgende lineare isoperimetrische Ungleichung (Verallgemeinerung einer euklidischen Formel von Bonnesen):

$A(\mathfrak{F}) \leq L(\mathfrak{F}) \cdot (-\bar{p}) - \kappa(\mathfrak{F}) \cdot \frac{\bar{p}^2}{2}$, aus der leicht (I) hergeleitet wird. — Für das asymptotische

Verhalten der wahren Parallelen mit großen Abständen p ist die Formel bemerkenswert:

$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{L(p)}{p} = 2\pi - C_T$, mit deren Hilfe insbesondere der Nachweis des Theorems C) gelingt,

wobei eine Folge von wahren Parallelen immer größeren Abstandes von einer festen, aber beliebigen Kurve \mathfrak{F} benutzt wird.

K. Strubecker (Wien).

Hadwiger, H.: Über Parallelinvarianten bei Eibereichen. Comment. math. helv. 13, 252—256 (1941).

B_i ($i = 1, 2$) seien zwei ebene Eibereiche mit den Umfängen U_i und In-

halten F_i . Jede Größe, die beim Übergang von den B_i zu den Parallelbereichen im gleichen Abstand ungeändert bleibt, ist Funktion der drei Parallelinvarianten $\Phi_{ik} \equiv F_i + F_k - \frac{1}{2\pi} U_i U_k$ ($i, k = 1, 2$). Dabei kann Φ_{ik} als der über alle Drehwinkel θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) erstreckte Mittelwert des Flächeninhaltes der Differenz von B_i und des um θ gedrehten Bereiches B_k gedeutet werden. Eine andere Deutung von Φ_{ik} , die deren Parallelinvarianz unmittelbar erkennen läßt, ist die folgende: Aus B_i erzeuge man durch die Decktranslationen des quadratischen Einheitsgitters das Eibereichgitter $\{B_i\}$; zu jeder Lage von B_k gehört bezüglich $\{B_i\}$ eine Treffzahl N gleich der Zahl der von B_k getroffenen Gitterbereiche und eine Schnittpunktzahl S gleich der Schnitzzahl des Randes von B_k mit den Rändern der getroffenen B_i . Φ_{ik} ist dann das über alle Lagen von B_k im Gitter $\{B_i\}$ erstreckte Mittel des Überschusses $N - \frac{1}{2} S$. Schon $N - \frac{1}{2} S$ selbst ist parallelinvariant. Man gewinnt hieraus den Satz: Damit keiner der Bereiche B_i, B_k den andern bedecken kann, ist notwendig $\Phi_{ik} \leq 0$, woraus übrigens die isoperimetrische Ungleichung folgt. *Harald Geppert* (Berlin).

Santaló, L. A.: A theorem and an inequality referring to rectifiable curves. Amer. J. Math. **63**, 635—644 (1941).

Ist K eine rektifizierbare Kurve der Länge L im R_m , n ihre Schnittpunktzahl mit einer beweglichen Hyperkugelfläche vom Radius R , $\dot{P} = dx_1 dx_2 \dots dx_m$ die Dichte des Mittelpunktes (x_1, x_2, \dots, x_m) dieser Kugel, so gilt die Formel $\int n \dot{P} = V_{m-1} \cdot L$, wo V_{m-1} das Volumen der $m - 1$ -dimensionalen Kugel vom Radius R darstellt. Beweis durch Annäherung durch Polygone. — Ist V das Volumen des Körpers, der aus allen Punkten besteht, die von der Kurve keinen größeren Abstand als R haben, so ist $V_m + LV_{m-1} \geq V$. Das Gleichheitszeichen kommt dann und nur dann vor, wenn keine Kugel vom Radius R die Kurve in mehr als zwei Punkte trifft und jede, die ihre Endpunkte enthält, sie ganz umfaßt. *Bol* (Freiburg).

Angewandte Geometrie:

● **Haussner, Robert: Darstellende Geometrie. 1. Tl.: Elemente. Ebenflächige Gebilde. 5., unveränd. Aufl. (Samml. Götschen Bd. 142.)** Berlin: Walter de Gruyter & Co. 1940. 207 S. u. 110 Fig. geb. RM. 1.62.

Ein bis auf das Literaturverzeichnis unveränderter Abdruck der zweiten Auflage (1904) des ersten Bandes des bekannten, vier Bände umfassenden, einführenden Lehrbuches der Darstellenden Geometrie aus der Sammlung Götschen. Dieser erste Band ist den ebenflächigen Gebilden gewidmet und behandelt zunächst die Grundbegriffe, die Parallelprojektion ebener Gebilde auf eine Bildebene, die Affinität in der Ebene und ihre Anwendung auf die Ellipse und die schiefe Parallelprojektion räumlicher Gebilde mit Einschluß von Kegel, Zylinder und Kugel. Dann in der Methode der zugeordneten Normalrisse die Darstellung von Punkten, Geraden und Ebenen, die Lösung der Grundaufgaben, Umlegung, Drehung und Seitenrisse. Schließlich die Dreikantaufgaben, die Darstellung von Vielflachen, ihre ebenen Schnitte und Durchdringungen. *W. Schmid* (Dresden).

Botez, Mihail St.: L'expression analytique de la perspective newtonienne des polygones. Bull. sci. École polytechn. Timișoara **10**, 93—99 (1941).

Die Arbeit handelt von den Zentralprojektionen von Polygonen aus einem Augpunkt auf zwei sich rechtwinklig schneidende Ebenen. Den Bildern wird eine analytische Darstellung mittels des Integralsinus an die Seite gestellt. *E. Kruppa*.

Buzano, Piero: Costruzione del raggio di curvatura di una curva sghemba in proiezione quotata. Boll. Un. Mat. ital., II. s. **3**, 146—151 (1941).

Verf. berechnet den Krümmungsradius einer Raumkurve in einem Punkt aus dem Steigungswinkel und den Krümmungsradien ihres Grundrisses und ihres Längenprofils in den entsprechenden Punkten. Daran schließen sich Bemerkungen über den zwei geradlinige Straßenzüge verbindenden Übergangsbogen. *Erwin Kruppa* (Wien).

Rossier, Paul: *Sur une règle pratique de dessin géométrique.* C. R. Soc. Physique Genève (Suppl. aux Arch. Sci. Physiques etc. 23) 58, 84—86 (1941).

Verf. behandelt auf Grund eigener Annahmen über die graphischen Charaktere und die Entstehung der Fehler — eine gewisse Willkür ist hierbei unvermeidlich — die Genauigkeit der Bestimmung des Schnittpunktes zweier Geraden und als Beispiel der Genauigkeit einer ganzen Konstruktion die Bestimmung der Mittelsenkrechten einer Strecke. Bei der ersten Aufgabe gelangt er zu einem von einer Regel Ch. Wieners [Darstell. Geometrie 1, 190 (1884)] abweichenden Ergebnis. Seine Bemerkungen hierzu lassen sich vielleicht dadurch erklären, daß er bei der Wienerschen Regel den a. a. O. beigefügten Zusatz „wegen der Krümmung des Lineals“ nicht mit anführt. Vgl. zu der Arbeit, auch wegen der Literatur, etwa Enzykl. d. math. Wiss. III. AB 6, E. Papperitz, Punkt 10.

W. Schmid (Dresden).

Barthelotte, Maurice: *Raccordements entre deux cercles égaux et en sens opposés.* An. Fac. Ci. Pôrto 25, 5—26 (1940).

Für das Problem des Übergangsbogens bei Bahnen wird eine Kurve gefordert, die im Ursprung einen Wendepunkt besitzt und sich einem vorgegebenen Kreis anschmiegt, während ihre Krümmung monoton wächst. Diese Fragestellung wird verallgemeinert behandelt, wobei als Kriterium das Verhältnis μ zwischen dem Abstand Ursprung — Kurventangente zu dem jeweiligen Krümmungsradius zugrunde gelegt wird. Eine Kurve der geforderten Art, bei der μ konstant bleibt, gibt es nicht. Es werden daher unter dem Gesichtspunkt der Brauchbarkeit Parabeln höherer Ordnung, Sinusspiralen (von der Gleichungsform $r^n = a^n \cdot \sin n\varphi$) und gewisse Radioiden (von der Gleichungsform $\omega = n \cdot y$, y Ordinate, ω Abstand des Ursprunges von der Tangente, n Konstante) mit genauer Diskussion ihrer geometrischen Eigenschaften untersucht.

U. Graf (Danzig).

Bastian, Karl Heinz: *Der Übergangsbogen, Form und Aussteckung.* Z. Vermessungswes., Stuttg. 70, 353—372 (1941).

Der Aufsatz gibt nach einem Hinweis auf die oberbautechnischen Grundlagen des Gleisbaus einen Überblick über die verschiedenen Verfahren der Übergangsbogenabsteckung. Nach einer Schilderung der Bogenabbildung als Krümmungsbild, Winkelbild und Summenbild wird auf die geradlinigen und die geschwungenen Übergangsrampen eingegangen; insbesondere werden das Absteckverfahren von Nalenz-Höfer mit der Begründung von Schramm und das Verfahren nach Findeis-Werner erläutert und an einem Zahlenbeispiel einander gegenübergestellt.

U. Graf (Danzig).

Maurer, H.: *Die Tangente der Azimutgleiche.* Astron. Nachr. 271, 217—218 (1941).

Sei auf der Kugel N der Nordpol, F eine Funkbake und S irgendein Kugelpunkt. Von S wird das Lot SL auf den Funkbakenmeridian NF gefällt. Die Winkel $NSL = \alpha$ und $LSF = \beta$ bilden zusammen das Azimut $\alpha + \beta$ des Punktes F in S . Legt man durch S einen Großkreis ST so, daß er mit SF den Winkel $FST = 90^\circ - \alpha$ und mit SN den Winkel $90^\circ - \beta$ bildet, so berührt er in S die Azimutgleiche, für deren sämtliche Punkte der Punkt F im Azimut $\alpha + \beta$ liegt. — Dieser Satz, der unmittelbar die Konstruktion der Tangente an die Azimutgleiche gestattet, wird nur unter Benutzung der Grundgleichungen der Sphärik bewiesen. Den Schluß der Note bildet eine Kritik der Ableitungen für eine Konstruktion der Azimutgleichen-Tangente ohne Differentialrechnung und sphärische Trigonometrie (Astron. Nachr. 268, 357; Ann. Hydrogr. 1940, 248—251).

U. Graf (Danzig).

Ansermet, A.: *Quelques caractéristiques du système de coordonnées Bonne.* Schweiz. Z. Vermessungswes. 39, 189—192 (1941).

Das Bonnesche Koordinatensystem wird für die Karten der Schweiz benutzt; diese Karten tragen ein Doppelnetz für die Umrechnung geodätischer in kartographische Koordinaten. In der Abhandlung werden die Azimutreduktion und die Krümmungen im einzelnen untersucht und die Zusammenhänge zwischen den Bonneschen und den konformen Koordinaten dargelegt.

U. Graf (Danzig).

Topologie:

Levi-Civita, T.: Formule di Green e di Stokes. Rev. Univ. Nac. Tucuman, Ser. A: Mat. **1**, 23—33 (1940).

Verf. erinnert an die bekannte, aber nicht immer genügend beachtete Tatsache, daß die Formeln, die man gewöhnlich mit den Namen Green, Stokes, Gauss und Ostrogradski in Verbindung bringt, eigentlich rein topologischen Charakter haben und weder mit Metrik noch mit Übertragung in Beziehung stehen. Er führt dies an einigen Beispielen aus, bringt erst die allgemeine Formel und spezialisiert sodann nach Einführung eines Fundamentaltensors. *Schouten (Delft).*

Eilenberg, Samuel: An invariance theorem for subsets of S^n . Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 73—75 (1941).

Verf. beweist: Es seien A und B zwei (nicht notwendig abgeschlossene) homöomorphe Teilmengen der n -Sphäre S^n . Ist die Anzahl der Komponenten von $S^n - A$ endlich, so ist sie gleich der Anzahl der Komponenten von $S^n - B$. — Der Beweis beruht auf einem Dualitätssatz für die Dimension $n - 1$. *Nöbeling (Erlangen).*

Alexandroff, P.: Zurückführung des Alexander-Pontrjaginschen Dualitätssatzes auf den Dualitätssatz von Kolmogoroff. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR **1**, 401—409 u. dtsch. Zusammenfassung 410 (1940) [Russisch].

Es handelt sich um den Alexanderschen Dualitätssatz in der folgenden Fassung. Sind \mathfrak{A} und \mathfrak{B} im Pontrjaginschen Sinne duale abelsche Gruppen und ist F eine abgeschlossene und beschränkte Menge im R^n , so sind die Bettischen Gruppen $B_{\mathfrak{A}}^r(F)$ und $B_{\mathfrak{B}}^r(R^n - F)$ zueinander dual. Dieser Satz wird in der vorliegenden Arbeit aus einem allgemeineren, von Kolmogoroff stammenden Dualitätssatz abgeleitet, für den auf eine in den Annals of Mathematics erscheinende Arbeit des Verf. verwiesen wird. (Nach dem Auszug referiert.) *W. Franz (Frankfurt a. M.).*

Alexandroff, Paul: Homologie-Gruppen allgemeiner Projektionsspekttra. Mitt. Akad. Wiss. Georg. SSR **2**, 213—218 u. dtsch. Zusammenfassung 218—219 (1941) [Russisch].

Als allgemeines Projektionsspektrum wird eine unbeschränkte, teilweise geordnete Menge von topologischen Komplexen K_α mit zugehörigen simplizialen Abbildungen S_α^β definiert mit folgenden Eigenschaften: 1. Für jedes Paar $\alpha < \beta$ sind endlich viele simpliziale Abbildungen S_α^β , die „Projektionen“ von K_β in K_α erklärt. 2. Ist $\alpha < \beta$ und T_β ein Simplex aus K_β , so gibt es ein Simplex T_α in K_α , so daß alle $S_\alpha^\beta T_\beta$ Seiten von T_α sind. 3. Sind für $\alpha < \beta < \gamma$ S_α^β und S_β^γ Projektionen, so ist auch das Produkt $S_\alpha^\gamma = S_\alpha^\beta S_\beta^\gamma$ eine Projektion. Für diese Projektionsspekttra werden mit Hilfe dualer abelscher Koeffizientengruppen Homologiegruppen erklärt und diskutiert. (Nach dem Auszug referiert.) *W. Franz (Frankfurt a. M.).*

Steenrod, N. E.: Regular cycles of compact metric spaces. Ann. of Math., II. s. **41**, 833—851 (1940).

Die von Vietoris [Math. Ann. **97**, 454—472 (1927)] zum Studium des höheren Zusammenhangs kompakter Räume eingeführten Zyklen erlaubten, wie Vietoris sofort selbst bemerkte und am Beispiel des „Solenoids“ erläuterte (S. 459), nicht in jeder Hinsicht zu einem befriedigenden Ausdruck für die Raumstruktur zu kommen, z. B. gelingt nicht die Übertragung der Dualitätssätze. Nach mancherlei Bemühungen anderer Autoren, diesem Übelstand abzuhelpen, schlägt Verf. bei Betrachtung eines Kompaktums die Verwendung eines neuen Typs von Zykeln vor: Ein „regulärer Zykel“ ist im wesentlichen ein einzelner unendlicher Zykel mit der Regularitätsforderung, daß die Durchmesser aufeinanderfolgender Simplizes nach Null konvergieren. Verf. kommt so zu neuen topologischen Invarianten, zu „Homologiegruppen“ H^q , von denen ein homomorphes Bild jeweils die Vietorissche Homologiegruppe $(q - 1)$ -ter Dimension ist. Bei diesen Homologien gelingt es — und dies bezeichnet Verf. als Hauptergebnis seiner Arbeit — folgenden Dualitätssatz zu beweisen: X sei eine abgeschlossene Menge in der n -Sphäre S^n , $K = S^n - X$ habe als unendlicher Komplex

die Homologiegruppen $H^q(K)$ der unendlichen q -Zykeln dieses Komplexes; dann ist $H^q(K) = H^q(X)$. — Als „schwach berandend“ wird ein regul. Zykel bezeichnet, wenn er homolog ist zu einem regulären Zykel, der als Summe von gewissen abzählbar vielen endlichen Zykeln erklärbar ist. Die Klassen schwach berandender Zykeln bilden die Untergruppe \tilde{H}^q von H^q , und dies ist wieder eine wesentliche neue Raum-Invariante. Eine besondere Rolle spielt die Untersuchung und Auswertung des schon erwähnten Vietorisschen Solenoids.

R. Furch (Rostock).

Chogoshvili, George: On the homology theory of topological space. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR 1, 337—340 (1940).

Verf. skizziert einen Beweis dafür, daß die r -te Homologiegruppe nach der Definition von P. Alexandroff [Compositio Math. 4, 256—270 (1937); dies. Zbl. 16, 230] mit denjenigen nach den beiden Definitionen von Steenrod [Amer. J. Math. 58, 661 bis 701 (1936); dies. Zbl. 15, 179] isomorph ist auch dann, wenn der Raum nur ein T_2 -Raum, also nicht unbedingt metrisch und kompakt ist. Er gibt weiter eine neue, mit den genannten ebenfalls äquivalente Definition für die r -te Homologiegruppe im T_2 -Raum, die im bikompakten Fall mit der Definition von Kolmogoroff identisch ist [C. R. Acad. Sci., Paris 202, 1144—1147, 1325—1327, 1558—1560, 1641—1643 (1936); dies. Zbl. 13, 422, 423; 14, 38, 39].

Nöbeling (Erlangen).

Cairns, Stewart S.: Homeomorphisms between topological manifolds and analytic manifolds. Ann. of Math., II. s. 41, 796—808 (1940).

Von „normaler Lage“ einer k -dimensionalen Mannigfaltigkeit M^k im euklidischen Raum R^n spricht der Verf., wenn sich durch jeden Punkt P von M^k eine (mit P stetig veränderliche) $(n - k)$ -dimensionale Hyperebene E_P legen läßt, so daß alle Sekanten der M^k , welche einer passenden Nachbarschaft von P angehören, mit E_P einen Winkel $\delta \geq d_P > 0$ bilden. — Die Begriffe „analytische“ bzw. „im R^n analytische“ Mannigfaltigkeit sind in Anlehnung an die Begriffe „differenzierbare“ bzw. „im R^n differenzierbare“ Mannigfaltigkeit bei Hassler Whitney (s. dies. Zbl. 15, 320) benutzt. — Bewiesen werden folgende Sätze: 1. Notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine M^k analytisch sei, ist die Möglichkeit einer solchen Triangulierung, daß der zugehörige Komplex in einem gewissen R^n eine polyedrale (d. h. aus euklidischen Simplexes bestehende) Darstellung P^k von normaler Lage besitzt. 2. Beliebig benachbart zu jeder normalen Lage eines solchen Polyeders P^k gibt es eine im R^n analytische, zu P^k homöomorphe Mannigfaltigkeit. 3. Jede 3-dimensionale, triangulierbare Mannigfaltigkeit erfüllt die Bedingung des Satzes 1, ist also analytisch. 4. Notwendige Bedingung für die Existenz einer normal liegenden polyedralen Darstellung einer Mannigfaltigkeit ist der Charakter als Brouwersche Mannigfaltigkeit (d. h. der Stern jeder Nullzelle von M^k kann in einen R^k abgebildet werden, so daß die Zellen des Sterns ohne Entartung in euklidische Simplexes übergehen). — Endlich wird noch eine kompliziertere, hinreichende Bedingung dafür formuliert, daß eine Brouwersche Mannigfaltigkeit in normaler Lage darstellbar ist. Bei vierdimensionalen Brouwer-Mannigfaltigkeiten folgt die Existenz einer normalen Lage (also auch des analytischen Charakters), wenn ein gewisses Deformationsproblem, betr. 2 geodätische Triangulationen einer 2-Sphäre, eine bejahende Antwort erhält.

R. Furch (Rostock).

Cairns, Stewart S.: Triangulated manifolds which are not Brouwer manifolds. Ann. of Math., II. s. 41, 792—795 (1940).

Außer den in der vorstehend besprochenen Arbeit eingeführten Begriffen wird noch der Begriff der „Sternmannigfaltigkeit“ eingeführt: Eine triangulierte Mannigfaltigkeit M^k , bei welcher der Stern jeder Nullzelle eine k -Zelle erfüllt. — Eine Übersicht über die verschiedenen Mannigfaltigkeitsbegriffe wird gegeben und die Kennntnis ihrer Zusammenhänge entschieden bereichert: 1. Es gibt für jedes $k > 3$ Sternmannigfaltigkeiten, welche keine Brouwermannigfaltigkeiten, also auch nicht analytisch sind, weil sie keine polyedrale Darstellung von normaler Lage in irgendeinem R^n zulassen. 2. Brouwers Mannigfaltigkeitserklärung ist bei $k > 3$ nicht unterteilungsinvariant.

3. Im Gegensatz zu den niederen Dimensionen gibt es für jedes $k \geq 3$ triangulierte k -Sphären, welche keine konvexe, nicht einmal eine bezüglich irgendeines Punktes sternförmige polyedrale Darstellung im R^{k+1} besitzen. 4. Die kleinste Dimensionszahl n , für welche ein gegebener Komplex eine polyedrale Darstellung im R^n hat, ist nicht für jeden Komplex unterteilungsinvariant. 5. Für jedes $k > 3$ gibt es Simplexsterne, welche zwar als Punktmengen k -Zellen sind, aber welche keine transversalen $(n - k)$ -Hyperebenen bei irgendeiner polyedralen Darstellung in irgendeinem R^n zulassen. Der Inhalt des „Grundlemmas“ ist die (skizzierte) Konstruktion einer „wesentlich krummlinigen“ Triangulation eines k -Simplex für $k \geq 3$. R. Furch (Rostock).

Martin, Venable, and J. H. Roberts: Two-to-one transformations on 2-manifolds. Trans. Amer. Math. Soc. **49**, 1—17 (1941).

Mit T sei eine eindeutige, stetige Abbildung eines Raumes A auf einen Raum B bezeichnet, bei welcher jeder Bildpunkt genau zwei Urbildpunkte hat. Ist A ein Bogen oder eine abgeschlossene 2-Zelle, so existiert ein solches T nicht [O. G. Harrold, Duke math. J. **5**, 789—793 (1939); dies. Zbl. **22**, 410, bzw. J. H. Roberts, Duke math. J. **6**, 256—262 (1940)]. Verff. lösen das Problem der Existenz von Abbildungen T und der Struktur der Bildräume für jede kompakte 2-Mannigfaltigkeit M ohne oder mit endlich vielen, paarweise fremden, einfach geschlossenen Randkurven. Damit für ein solches M eine Abbildung T existiert, ist notwendig und hinreichend, daß die (negativ genommene) Eulersche Charakteristik $-\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 = \chi(M)$ gerade sei. Übrigens ist dann $\chi(M) = 2\chi(B)$, wenn $B = T(M)$ ist. Weiter bezeichne B_k einen Raum, den man erhalten kann aus einer kompakten Mannigfaltigkeit mit k Randkurven ($k = 0, 1, 2, \dots$) durch paarweise Identifikation endlich vieler innerer Punkte der Mannigfaltigkeit. Eine kompakte Mannigfaltigkeit M mit n Randkurven ($n = 0, 1, 2, \dots$) und ein B_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) mögen eigentlich verknüpft heißen, wenn $\chi(M) = 2\chi(B_k)$ und $\frac{1}{2}n \leq k \leq n$ ist. Damit nun eine Abbildung T auf M mit $T(M) = B_k$ existiert, ist notwendig und hinreichend, daß M und B_k eigentlich verknüpft sind. Nöbeling (Erlangen).

Whitney, Hassler: On regular families of curves. Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 145 bis 147 (1941).

Verf. beweist: Damit eine Familie von paarweise fremden, einen metrischen Raum überdeckenden Kurven regulär sei (d. h. damit sie in einer Umgebung jedes Punktes mit einer Familie von Geraden homöomorph sei), ist hinreichend: ist ein Punkt p und eine Richtung in der Kurve $C(p)$ durch p gegeben, so enthält $C(p)$ in dieser Richtung einen Bogen pq mit folgender Eigenschaft: für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so daß für jeden Punkt p' mit $\varrho(p', p) < \delta$ ein Bogen $p'q'$ in $C(p')$ existiert mit $p'q' \subset V_\varepsilon(pq)$, $q' \subset V_\varepsilon(q)$. Vgl. H. Whitney, Ann. of Math., II. s. **34**, 244—270 (1933); dies. Zbl. **6**, 371. Nöbeling (Erlangen).

Chogoshvili, George: On Schnirelmann's transformations. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **30**, 199—203 (1941).

À propos d'un problème de déformation posé par Schnirelmann l'auteur formule des conditions analytiques pour qu'une famille d'hypersurfaces $\{M_t\}$ à r dimensions, plongée dans l'espace n -dimensionnel $(x_1 x_2 \dots x_n)$ et dépendant du paramètre t , puisse être regardée topologiquement comme famille de surfaces de niveau d'une fonction $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_{r+1})$, au voisinage d'un point critique p de $\{M_t\}$. Le résultat obtenu par l'auteur permet ainsi de réduire l'étude topologique de la famille $\{M_t\}$ à celle des surfaces de niveau des φ non dégénérées ayant pour point critique isolé p . L'indice k de ce point critique non dégénéré est alors attribué au point p de la famille $\{M_t\}$. En s'appuyant sur des résultats obtenus par lui antérieurement [Chogoshvili, C. R. Acad. Sci. URSS N. s. **22**, 293—297 (1939); ce Zbl. **21**, 162] l'auteur en tire des conclusions concernant le variation des nombres de Betti des hypersurfaces de $\{M_t\}$ au passage par une valeur critique de t . S. Stoilow (Bukarest).

Montgomery, Deane, and Leo Zippin: Topological transformation groups. 1. Ann. of Math., II. s. 41, 778—791 (1940).

Eine topologische Gruppe G heißt eine Transformationsgruppe eines Raumes E , wenn jedem Element g von G ein Homöomorphismus $g(x)$ von E in sich entspricht, dabei zu der Identität g_0 von G die identische Abbildung von E auf sich gehört, für je zwei Elemente g_1 und g_2 und jeden Punkt x von E gilt $g_1[g_2(x)] = (g_1g_2)(x)$ und schließlich $g(x)$ gleichzeitig stetig in g und x ist. G wird als kompakt und metrisch vorausgesetzt. Eine Bahnkurve („orbit“) von G ist eine Teilmenge $G(x)$ von E , bestehend aus allen Punkten y von E , in welche x durch Transformationen g aus G transformiert werden kann. Verff. untersuchen den Zusammenhang der Struktur der Bahnkurven mit der Struktur von G . Die lokale Struktur einer endlichdimensionalen Bahnkurve ist der einer endlichdimensionalen kompakten Gruppe ähnlich. Die Menge aller Punkte von E , welche auf mindestens k -dimensionalen Bahnkurven liegen, ist in E offen. Wenn $G(x)$ eine endlichdimensionale Bahnkurve und G eine wahre Transformationsgruppe auf $G(x)$ ist, d. h. jedes g aus G außer g_0 mindestens einen Punkt von $G(x)$ in einen davon verschiedenen Punkt transformiert [„acts effectively on $G(x)$ “], dann ist G endlichdimensional; eine obere Schranke für die Dimension von G wird angegeben. Wenn G eine wahre Transformationsgruppe auf einem lokal Euklidischen Raum ist und die Bahnkurven lokal zusammenhängend sind, dann ist G eine Liesche Gruppe. Zahlreiche weitere Sätze.

Nöbeling (Erlangen).

Pontrjagin, L.: Über die topologische Struktur der Lieschen Gruppen. Comment. math. helv. 13, 277—283 (1941).

Durch Ergebnisse des Verf. über die Poincaréschen Polynome der Räume kompakter Liescher Gruppen, sowie über die Torsionszahlen und Fundamentalgruppen der zu den Klassen A_n und C_n gehörenden Räume (dies. Zbl. 22, 316) war die Frage nahegelegt, ob diese letzten Räume mit den Produkten gewisser Sphären S^k homöomorph seien. Hier wird die i. a. verneinende Antwort gegeben; jedenfalls ist der zur Klasse A_n (unitäre Gruppen) bei $n = 2$ gehörende Raum, der mit dem Produkt $S^2 \times S^3 \times \dots \times S^{2n+1}$ homöomorph sein müßte, nicht mit dem Produkt $S^3 \times M$ homöomorph, wo M irgendein topologischer Raum ist.

R. Furch (Rostock).

Kodaira, Kunihiko: Über die Beziehung zwischen den Maßen und den Topologien in einer Gruppe. Proc. phys.-math. Soc. Jap., III. s. 23, 67—119 (1941).

André Weil hat (dies. Zbl. 13, 425) angezeigt, daß zwischen gewissen Maßen und Topologien in einer Gruppe eine enge Beziehung besteht: jedem Weilschen Maß entspricht eine Topologie der Gruppe G , so daß G mit dieser Topologie im kleinen total beschränkt wird und das gegebene Maß mit dem Haarschen Maß von dieser Gruppe übereinstimmt. So entsprechen sich die Weilschen Maße und gewisse Topologien von G in eindeutiger Weise. Nun wird der nach kurzen Andeutungen von Weil ausgeführte Beweis mitgeteilt, wobei für die genaue Formulierung des Ergebnisses „allgemeintopologische“ Gruppen eingeführt werden, indem einerseits der Begriff der Topologie etwas allgemeiner gefaßt wird als üblich (Trennungsaxiom fehlt), andererseits ihm eine gewisse Abzählbarkeitsbedingung auferlegt wird.

R. Furch (Rostock).

Hopf, H., und H. Samelson: Ein Satz über die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen. Comment. math. helv. 13, 240—251 (1941).

Ein Wirkungsraum W (= espace homogène bei Cartan) ist eine Mannigfaltigkeit, welche durch eine Liesche Gruppe G transitiv in sich transformiert wird (Gruppenräume sind also Wirkungsräume, in denen G einfach transitiv wirkt). Betrachtet werden die zu geschlossenen Gruppen analytischer Selbstabbildungen gehörenden W . Es wird gezeigt: Die Charakteristik eines solchen W ist positiv oder Null. Dies folgt aus 2 Sätzen: 1. Besitzt eine zur Gruppe gehörige Transformation des Wirkungsraums höchstens endlich viele Fixpunkte, so ist deren Anzahl gleich der Charakteristik von W . 2. Zu beliebigem W einer Gruppe G gibt es ein solches Element a in G , daß die ihm

zugeordnete Selbstabbildung von W höchstens endlich viele Fixpunkte hat (die Menge dieser a ist sogar in G überall dicht). R. Furch (Rostock).

Sebastião e Silva, J.: Sur l'axiomatique des espaces de Hausdorff. Portugaliae Math. 2, 93—109 (1941).

Verf. führt eine Hausdorffsche Topologie vermöge des Begrenzungs- und Randbegriffs ein. Es bedeute $f_1(X) = \overline{X} \cdot 1 - \overline{X}$, $f_2(X) = (1 - X) \cdot f_1(X)$. Es bedeute weiter α_i , $i = 1, 2$ die Aussage: Ist $a_1 \in f_i(A)$, $a_2 \in f_i(A)$, $a_1 \neq a_2$, so gibt es eine Zerlegung $A = A_1 + A_2$, $A_1 \cdot A_2 = 0$ derart, daß $a_1 \notin f_i(A_2)$, $a_2 \notin f_i(A_1)$. Es gilt der Satz: Genügt ein Fréchet'scher Raum (V) der 2° Bedingung von F. Riesz, so ist das letzte Hausdorffsche Umgebungsaxiom (D) äquivalent mit den folgenden Bedingungen: 1. $f_1(A) \subset A$, falls A einpunktig ist; 2. es gilt α_1 . Oder: 1. $f_2(A) = 0$, falls A einpunktig ist; 2. es gilt α_2 . Die Axiome des Hausdorffschen Raumes sind: I. $ABf_1(AB) = AB[f_1(1 - A) + f_1(1 - B)]$; II. $f_1^2(A) \subset f_1(A)$; III. $f_1(A) \subset A$ für höchstens einpunktige A ; IV. α_1 oder auch: I. $f_2(A + B) = (1 - B)f_2(A) + (1 - A)f_2(B)$; II. $f_2^2(A) \subset A$; III. $f_2(A) = 0$ für höchstens einpunktige A ; IV. α_2 . J. Novák.

Gibert, Armando, et Hugo Ribeiro: Quelques propriétés des espaces (Cf) . Portugaliae Math. 2, 110—120 (1941).

Es wird gezeigt: Ein Raum (Cf) [vgl. Jean-Louis Destouches, C. R. Acad. Sci., Paris 204, 219—222 (1937); dies. Zbl. 16, 84] kann definiert werden als eine Menge 1, in welcher jeder Teilmenge X eine Menge \overline{X} (abgeschlossene Hülle) mit folgenden Eigenschaften zugeordnet ist: $\overline{0} = 0$; $X \subset \overline{X}$; $\overline{\Sigma X_i} = \Sigma \overline{X_i}$ für jede Familie $\{X_i\}$ von Teilmengen von 1. Analoge Kennzeichnungen der Räume (Cf) auch durch die folgenden Mengenfunktionen: X' (dérivée), $i(X) = X - \overline{1 - X}$ (intérieur), $b(X) = X \overline{1 - X}$ (bord), $o(X) = b(1 - X)$ (orle), $f(X) = \overline{X}(1 - X) - X \overline{1 - X}$ (frontière), $c(X) = XX'$ (cohérence) [vgl. hierzu H. Ribeiro, Portugaliae Math. 1, 259—274 (1940); dies. Zbl. 23, 384]. Eine Kennzeichnung der diskreten Räume von Alexandroff, welche den Kolmogoroff'schen Axiomen nicht genügen [unter den Räumen (V)]. In einem Raum (Cf) sind die Umgebungen $V_x^{(d)}$ zusammenhängende Mengen. $XY' \neq 0$ und $X'Y \neq 0$ sind äquivalent für je zwei Mengen X, Y ; hierbei bedeutet der Akzent die Derivierte bez. der reziproken Topologie. Die Räume (Cf) können gekennzeichnet werden als Mengen mit einer gewissen irreflexiven Relation $x \rho y$ zwischen je zwei Elementen (Punkten); dieselbe ist äquivalent mit $x \in \overline{y}$ in der Sprache der Topologie. Nöbeling.

Wallace, A. D.: Separation spaces. Ann. of Math., II. s. 42, 687—697 (1941).

Nach Lennes-Hausdorff nennt man zwei Mengen X und Y eines topologischen Raumes getrennt, wenn $\overline{X} \cdot Y + X \cdot \overline{Y} = 0$ ist. Verf. führt nun den Begriff der getrennten Mengen axiomatisch ein in einer Menge S beliebiger Elemente, Punkte genannt. Für die Teilmengen X, Y, \dots von S sei eine binäre Relation $X|Y$ („ X ist von Y getrennt“) erklärt, die folgenden Axiomen genügt: S I. Die leere Menge ist von jeder Teilmenge X von S getrennt. S II. Aus $X|Y$ folgt $Y|X$. S III. Aus $X|Y$ folgt $X \cdot Y = 0$. S IV. Aus $X|Y$ und $X_1 \subset X$ folgt $X_1|Y$. S V. Aus $X_1|Y$ und $X_2|Y$ folgt $(X_1 + X_2)|Y$. S VI. Aus $x|X$ folgt $x|kX$; dabei ist kX die Menge aller Punkte p von S , für welche $p|X$ nicht gilt. S VII. Für je zwei Punkte x und y gilt $x|y$. S VIII. Wenn für jedes $x \in X$ und jedes $y \in Y$ gilt $x|Y$ bzw. $y|X$, so gilt $X|Y$. Verf. beweist folgenden Kennzeichnungssatz: K I. $k(X + Y) = kX + kY$. K II. $kX = X$, wenn X leer oder ein Punkt ist. K III. $kkX = kX$. R I. $x \in kX$ ist äquivalent damit, daß $x|X$ nicht gilt. R II. $X|Y$ ist äquivalent mit $X \cdot kY + Y \cdot kX = 0$. Wenn umgekehrt ein Operator k die Eigenschaften K I—K III hat (Beispiel: die abgeschlossene Hülle in einem topologischen Raum) und die Trennung durch R II definiert wird, so gilt S I—S VIII und R I. Weiter werden die „erwarteten“ Sätze über die zusammenhängenden Mengen und Zusammenhangsinvarianten bewiesen; dabei heißt eine Menge zusammenhängend, wenn sie nicht als Summe zweier nichtleerer getrennter Mengen darstellbar ist. Nach einem dynamischen Beispiel folgt schließlich noch ein Abschnitt

über stetige Abbildungen und eine Verallgemeinerung des Satzes von Eilenberg-Whyburn über die Faktorzerlegung stetiger Abbildungen. *Nöbeling* (Erlangen).

Bourbaki, Nicolas: *Espaces minimaux et espaces complètement séparés*. C. R. Acad. Sci., Paris **212**, 215—218 (1941).

Verf. nennt einen separierten (d. h. Hausdorffschen) Raum R minimal, wenn die Umkehrung jeder eineindeutigen, stetigen Abbildung auf einen ebensolchen Raum ebenfalls stetig ist, oder, was damit gleichbedeutend, wenn jede separierte (d. h. Hausdorffsche) Topologie von R , welche weniger fein ist als die gegebene Topologie von R , mit dieser identisch ist. Verf. gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung hierfür an: jedes Filter, das eine aus offenen Mengen bestehende Basis hat und höchstens einen adhärenen Punkt besitzt, ist konvergent. — Haben je 2 Punkte a und b fremde, abgeschlossene Umgebungen, so nennt Verf. den Raum vollständig separiert. Hierfür ist hinreichend, daß für je zwei Punkte a und b eine stetige, numerische Funktion existiert, die in a und b verschiedene Werte annimmt. Für dies letztere ist notwendig und hinreichend, daß die Topologie des Raumes feiner sei als eine vollständig reguläre Topologie. *Nöbeling* (Erlangen).

Weinberg, N.: *Sur les espaces topologiques régulièrement fermés*. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **31**, 523—524 (1941).

Zwei notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß ein regulärer Raum R regulär abgeschlossen („fermé r “), d. h. in jedem ihn enthaltenden regulären Raum abgeschlossen sei. Ein Raum R ist bikompakt, wenn er regulär abgeschlossen und stark regulär ist [letzteres heißt: für jeden Punkt x und jede Umgebung $U(x)$ existieren Umgebungen $U_1(x)$, $U_2(x)$, ... mit $\bar{U}_i(x) \subset U_{i+1}(x) \subset U(x)$]. *Nöbeling*.

Szpilrajn, Edward: *Remarque sur les produits cartésiens d'espaces topologiques*. C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **31**, 525—527 (1941).

Bekanntlich ist ein topologischer Raum R separabel, wenn er eine abzählbare Basis besitzt, d. h. ein abzählbares System \mathfrak{B} offener Mengen derart, daß jede offene Menge von R Summe von Mengen aus \mathfrak{B} ist. Verf. nennt einen topologischen Raum R schwach separabel, wenn jedes System offener, paarweise fremder Teilmengen von R höchstens abzählbar ist. Jeder separable Raum ist schwach separabel. Jedes stetige Bild eines schwach separablen Raumes ist schwach separabel. Eine Teilmenge A eines schwach separablen Raumes ist als Raum schwach separabel dann und nur dann, wenn dies für \bar{A} gilt. Jedes topologische Produkt von abzählbar oder un abzählbar vielen separablen Räumen ist schwach separabel. — Verf. gibt schließlich noch eine Verallgemeinerung des Cantorsche Diskontinuums. *Nöbeling*.

Alexandroff, Paul: *Der endliche dimensionstheoretische Summensatz für bikompakte Räume*. Mitt. Akad. Wiss. Georg. SSR **2**, 1—5 u. dtsh. Zusammenfassung 5—6 (1941) [Russisch].

Für die mittels Überdeckungen definierte Dimension $\dim \Phi$ [vgl. P. Alexandroff, C. R. Acad. Sci. URSS, N. s. **26**, 619—622 (1940); dies. Zbl. **23**, 176] wird bewiesen: Die Vereinigungsmenge von endlich vielen, höchstens n -dimensionalen, abgeschlossenen Mengen eines bikompakten Hausdorffschen Raumes ist höchstens n -dimensional. Hieraus folgt für die mittels Induktion definierte Dimension $\text{ind } \Phi$ eines Bikompaktums Φ nach einer Konstruktion von Urysohn: $\dim \Phi \leq \text{ind } \Phi$. — Nach der deutschen Zusammenfassung referiert. *Nöbeling* (Erlangen).

Ribeiro, Hugo: *Une extension de la notion de convergence*. Portugaliae Math. **2**, 153—161 (1941).

Eine Menge A heißt orientiert, falls eine Relation $>$ erklärt ist, nach der $a > a'$ oder nicht $a > a'$ für je zwei Elemente $a \in A$, $a' \in A$ gilt; dabei soll das transitive Gesetz erfüllt sein und zu jedem $a \in A$ soll es ein $b \in A$ mit $b > a$ geben. Es sei T ein Fréchet'scher Raum (V) (Fréchet, Les espaces abstraits, Paris 1928, S. 173) und $x(a|A)$ bedeute eine eindeutige Abbildung, die jedem $a \in A$ einen Punkt $x(a) \in T$ zuordnet. Man führt die Definition ein: Eine Abbildung $x(a|A)$ konvergiert gegen den Punkt $x \in T$.

wenn es zu jeder Umgebung I_x^0 von x ein $a_0 \in A$ derart gibt, daß $x(a) \in I_x^0$ für alle $a > a_0$. Verf. gibt einige Eigenschaften dieser Konvergenz an. Die Konvergenz mit diesen Eigenschaften induziert dann in jeder abstrakten Menge eine Topologie (V). Es werden auch die bekannten Relationen zwischen dem Limes und der abgeschlossenen Hülle sowie auch zwischen der Konvergenz und der Stetigkeit der Funktionen festgestellt. Diese Definition der Konvergenz ist allgemeiner als die ähnliche bei Garrett Birkhoff [Moore-Smith convergence in general topology; Ann. of Math., II. s. 38, 39—56 (1937); dies. Zbl. 16, 85]. J. Novák (Brünn).

Ribeiro, Hugo: La cohérence d'un ensemble et les ensembles denses en soi. Portugaliae Math. 2, 67—76 (1941).

Die Menge XX' eines Fréchet'schen Raumes (V) heißt Kohärenz von X ; sie wird mit $c(X)$ bezeichnet. Es gilt: I. $c(X) = 0$, falls X einpunktig ist; II. $c(X) \subset X$; III. $X \subset Y \rightarrow c(X) \subset c(Y)$. Mit Hilfe des Kohärenzbegriffs kann eine Topologie eingeführt werden. Sind die Axiome I, II und III erfüllt, so ist das eine Topologie (V). Eine Menge X heißt insichdicht, falls $X = c(X)$ ist. Auch mit Hilfe des Systems „insichdichter“ Mengen sowie vermöge einer Operation $f(X) = 1 - c(1 - X)$ (dabei sollen gewisse Axiome erfüllt sein) kann man in jeder abstrakten Menge eine Topologie (V) einführen. J. Novák (Brünn).

Hall, D. W., and W. T. Puckett jr.: Strongly arcwise connected spaces. Amer. J. Math. 63, 554—562 (1941).

Verff. haben einen Raum A stark bogenverknüpft genannt, wenn für jede unendliche Teilmenge M von A ein Teilbogen von A existiert, welcher unendlich viele Punkte von M enthält. Verff. geben zwei neue Kennzeichnungen der stark bogenverknüpften Kontinuen und einige Folgerungen daraus. Nöbeling (Erlangen).

Jones, F. Burton: Aposyndetic continua and certain boundary problems. Amer. J. Math. 63, 545—553 (1941).

Verf. nennt eine Teilmenge M eines Hausdorff'schen Raumes aposyndetisch in einem Punkt P von M , wenn für jeden Punkt $X \neq P$ von M eine offene Teilmenge O von M existiert, welche P enthält und in einer in $M - X$ liegenden zusammenhängenden, relativ abgeschlossenen Teilmenge von M enthalten ist. M heißt aposyndetisch, wenn M in jedem Punkt P von M aposyndetisch ist. Wenn M in P lokal zusammenhängend ist, dann ist M auch aposyndetisch in P . Ein halb-lokal zusammenhängendes Kontinuum ist aposyndetisch [zum Begriff „halb-lokal zusammenhängend“ vgl. G. T. Whyburn, Amer. J. Math. 61, 733—749 (1939); dies. Zbl. 21, 359]. Viele der von Whyburn l. c. für halb-lokal zusammenhängende Kontinuen bewiesenen Sätze gelten auch für aposyndetische Kontinuen. Auch einige andere Sätze über lokal zusammenhängende Kontinuen werden auf aposyndetische Kontinuen verallgemeinert. Ein Kontinuum M ist dann und nur dann aposyndetisch, wenn es frei zerlegbar ist, d. h. wenn M für je zwei verschiedene Punkte A und B von M Summe zweier Kontinuen ist, von denen keines beide Punkte A und B enthält. Weiter werden Begrenzungsprobleme behandelt in einem Raum S , in welchem die Axiome 0—4 von R. L. Moore (dies. Zbl. 5, 54) gelten. Insbesondere ergibt sich folgende Verallgemeinerung des Satzes von Torhorst: Jede Komponente der Begrenzung eines Komplementärgebietes eines lokal kompakten, aposyndetischen Kontinuums ist ein lokal kompaktes, lokal zusammenhängendes Kontinuum (Terminologie wie bei Moore, l. c.). Nöbeling (Erlangen).

Jones, F. Burton: Certain consequences of the Jordan curve theorem. Amer. J. Math. 63, 531—544 (1941).

Bisher sind Folgerungen aus dem Jordanschen Kurvensatz nur unter starken, weiteren Voraussetzungen gezogen worden. Verf. untersucht die vollständigen Moore'schen Räume (Räume, in denen die Axiome 0 und 1 von Moore gelten; vgl. R. L. Moore dies. Zbl. 5, 54), welche lokal zusammenhängend sind, keinen Zerlegungspunkt (cut point) enthalten und in denen der Jordansche Kurvensatz gilt. Es wird gezeigt, daß diese Räume gewissen Teilmengen der Ebene ähnlich sind. Nöbeling (Erlangen).